

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра общей и теоретической физики

537(07)
Э454

В.К. Герасимов, Т.О. Миронова, Ю.Б. Пейсахов, Т.П. Привалова

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ
Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2014

УДК 537(075.8) + 537.6(075.8)

*Одобрено
научно-методическим советом университета*

*Рецензенты:
Песин Л.А., Усачев В.К.*

Электричество и магнетизм. Руководство к решению задач: учебное пособие для студентов вузов / В.К. Герасимов, Т.О. Миронова, Ю.Б. Пейсахов, Т.П. Привалова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 140 с.

Основное назначение учебного пособия – оказать помощь студентам очной и заочной форм обучения при выполнении контрольных работ по курсу общей физики. Дано краткое изложение теоретического материала и приведены примеры решения типовых задач по разделам физики «Электричество» и «Электромагнетизм».

Учебное издание предназначено для студентов, обучающихся по укрупненным группам специальностей и направлений подготовки в области образования «инженерное дело, технологии и технические науки».

УДК 537(075.8) + 537.6(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Список рекомендуемой литературы	5

Часть 1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. Теоретическая часть	
1.1. Закон сохранения заряда. Взаимодействие электрических зарядов. Закон Кулона	7
1.2. Электростатическое поле (ЭСП). Напряженность электрического поля (ЭП)	7
1.3. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для ЭСП в вакууме ...	9
1.4. Потенциал. Работа перемещения заряда в ЭСП. Связь напряженности и потенциала	10
1.5. Емкость проводника. Конденсаторы	11
1.6. Энергия заряженного проводника и конденсатора. Энергия ЭП	12
2. Рекомендации к решению физических задач	13
3. Примеры решения задач	
3.1. Закон Кулона. Взаимодействие электрических зарядов План решения задач	13
3.2. Расчет напряженности и потенциала электростатического поля с помощью принципа суперпозиции План решения задач	18
3.3. Расчет напряженности электростатического поля с помощью теоремы Гаусса План решения задач	36
3.4. Движение заряженных частиц в электростатическом поле План решения задач	45
3.5. Конденсаторы. Энергия электрического поля План решения задач	51

Часть 2

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

4. Теоретическая часть	
4.1. Сила тока. Плотность тока. Сопротивление проводника	59
4.2. Закон Ома. Правила Кирхгофа	60
4.3. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца	61
5. Рекомендации к решению задач по разделу «Постоянный электрический ток»	61
6. Примеры решения задач	62

Часть 3

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

7. Теоретическая часть	
7.1. Магнитное поле постоянного тока	72
7.2. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле	74
7.3. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях	75
7.4. Магнитный поток. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	77
7.5. Явление электромагнитной индукции. Индуктивность цепи. Энергия магнитного поля	78
7.6. Магнитное поле в веществе	80
8. Рекомендации к решению задач по разделу «Электромагнетизм»	81
9. Примеры решения задач	
9.1. Магнитное поле постоянного тока	
План решения задач	82
9.2. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле	
План решения задач	90
9.3. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях	
План решения задач	101
9.4. Магнитный поток. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	
План решения задач	110
9.5. Явление электромагнитной индукции. Индуктивность цепи. Энергия магнитного поля	
План решения задач	116
9.6. Магнитное поле в веществе	
План решения задач	131

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие адресовано студентам вузов очной и заочной форм обучения и является продолжением аналогичного издания «Механика и молекулярная физика». Учебное пособие имеет целью оказать помощь студентам заочной формы обучения в выполнении контрольных работ (КР) по курсу физики для технических вузов и технических специальностей университетов: как в решении задач, так и в оформлении решений при написании контрольных работ.

Требования к оформлению решения задач КР

1. Приводите в своей тетради полный текст задачи, а затем краткое условие задачи, выписывая заданные и определяемые величины с использованием общепринятых обозначений.

2. В решении задачи всегда приводите рисунок, график или схему.

3. Решение задачи сопровождайте краткими, но исчерпывающими пояснениями: а) назовите используемый для решения закон, б) приведите его словесную и математическую формулировки в общем виде, в) объясните правомерность применения закона и уточните формулу закона в условиях данной задачи, г) назовите величины, входящие в формулы, в том числе физические постоянные.

4. Каждую задачу стремитесь решать в общем виде, не делая промежуточных вычислений; решение задачи завершайте расчетной формулой определяемой величины.

5. Вычисляя, в расчетную формулу обязательно подставьте значения данных и табличных величин, предварительно переведя их в систему СИ.

Учебное пособие соответствует учебной программе следующих направлений: 140100 Теплоэнергетика и теплотехника, 140400 Электроэнергетика и электротехника, 150400 Metallургия, 150700 Машиностроение, 151900 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительного производства, 220400 Управление в технических системах, 230100 Информатика и вычислительная техника.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Академия, 2010. – 557 с.

2. Писарев, Н.М. Физика: Курс лекций для студентов инженерных специальностей вузов / Н.М. Писарев; под ред. Г.П. Вяткина. – Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1997. – Ч.1. – 320 с.

3. Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие для вузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2008. – 719 с.

4. Савельев, И.В. Курс физики Т.2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика: учебное пособие для втузов: в 3 т. / И.В. Савельев. – СПб. и др.: Лань, 2008. – 462 с.

5. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учебное пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Издательство Физматлит, 2008. – 640 с.

6. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике: учебное пособие для втузов / И.Е. Иродов. – СПб. и др.: Лань, 2009. – 431 с.

7. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики: учебное пособие для втузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям / Е.В. Фирганг. – СПб. и др.: Лань, 2009. – 347 с.

8. Герасимов, В.К. Физика. Методические указания к выполнению контрольных работ / В.К. Герасимов, Т.О. Миронова, Ю.Б. Пейсахов, Т.П. Привалова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 110 с.

9. Электричество и магнетизм: учебное пособие к выполнению лабораторных работ по курсу физики / Л.Ф. Гладкова, А.Е. Гришкевич, С.И. Морозов и др.; под ред. А.Е. Гришкевича. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. – 110 с.

ЧАСТЬ 1
ЭЛЕКТРОСТАТИКА
1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**1.1. Закон сохранения заряда. Взаимодействие электрических зарядов.
Закон Кулона**

Электрический заряд Q дискретен, или квантован. *Закон квантования электрического заряда:*

$$Q = \pm Ne, \quad (1)$$

где N – целое число; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный электрический заряд.

Закон сохранения заряда (ЗСЗ): алгебраическая сумма электрических зарядов замкнутой системы (не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается постоянной, –

$$\sum Q_i = \text{const.} \quad (2)$$

Закон Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов Q_1 и Q_2 определяется формулой

$$F = k \frac{|Q_1 Q_2|}{\epsilon r^2}; \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}; \quad (3)$$

где $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{ф}}$ – коэффициент пропорциональности; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; r – расстояние между взаимодействующими зарядами Q_1 и Q_2 ; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ – электрическая постоянная. Вектор кулоновской силы \vec{F} направлен вдоль прямой линии, соединяющей заряды (рис. 1).

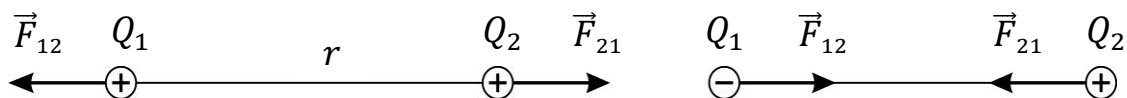


Рис. 1

1.2. Электростатическое поле (ЭСП). Напряженность электрического поля (ЭП)

Напряженность \vec{E} – силовая характеристика ЭП, равная отношению:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_{\text{пр}}}, \quad (4)$$

где \vec{F} – сила, действующая на положительный пробный заряд $Q_{\text{пр}}$, помещенный в ту точку пространства, где определяют напряженность ЭП. Из определительной формулы (4) следует, что в данной точке ЭП вектор $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{F}$. Поэтому для определения направления вектора напряженности в выбранной точке A электростатического поля в эту точку мысленно

помещают положительный пробный заряд $Q_{\text{пр}}^+$ и с помощью закона Кулона определяют направление силы \vec{F} и $\vec{E} \parallel \vec{F}$ (рис. 2).

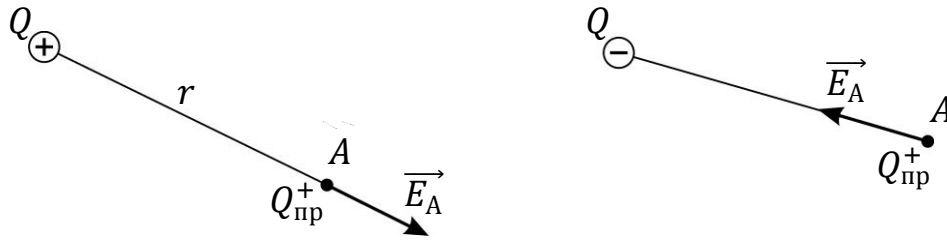


Рис. 2

Напряженность поля, созданного *точечным зарядом* Q в точке A , находящейся на расстоянии r от заряда (см. рис. 2), согласно формуле (4) с учетом закона Кулона (3), определяется следующей формулой:

$$E = \frac{kQ}{\epsilon r^2}. \quad (5)$$

Принцип суперпозиции ЭСП: напряженность \vec{E} результирующего поля, созданного системой зарядов, равна **геометрической сумме** напряженностей \vec{E} полей, создаваемых в данной точке каждым n -тым зарядом (рис. 3):

$$\vec{E} = \sum \vec{E}. \quad (6)$$

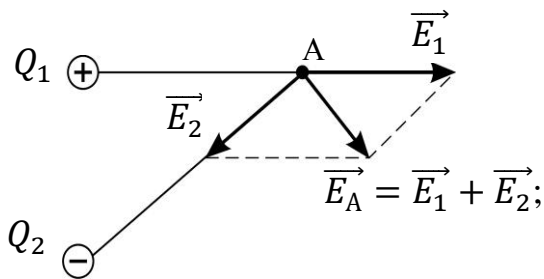


Рис. 3

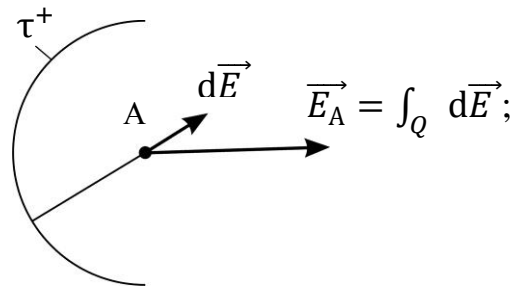


Рис. 4

Если ЭСП создается зарядом Q , распределенным по длине тела с линейной плотностью заряда τ $\left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}}\right)$ (рис. 4), то принцип суперпозиции записывают в виде:

$$\vec{E} = \int_Q d\vec{E}, \quad (7)$$

где $dE = \frac{k dQ}{\epsilon r^2}$ – напряженность поля, созданного точечным зарядом $dQ = \tau dl$, находящимся на малом участке длины dl .

1.3. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для ЭСП в вакууме

Поток вектора напряженности \vec{E} электростатического поля через площадку dS :

$$d\Phi_E = E_n dS = E \cos \alpha dS,$$

где α – угол между вектором напряженности \vec{E} и нормалью \vec{n} к площадке dS (рис. 5).

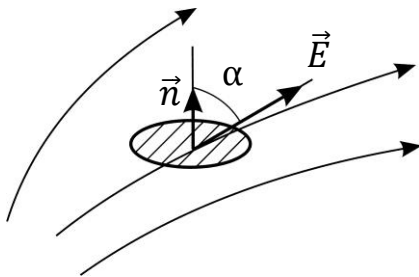


Рис. 5

Поток вектора напряженности \vec{E} через замкнутую поверхность:

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E, \text{ или } \Phi_E = \oint_S E_n dS. \quad (8)$$

Теорема Гаусса для ЭСП в вакууме:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_i. \quad (9)$$

Поток вектора напряженности ЭСП в вакууме через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 .

Теорему Гаусса используют для расчета напряженности ЭСП, имеющих симметрию. В таких полях можно выбрать вспомогательную поверхность, для которой просто вычисляется интеграл в левой части теоремы Гаусса (9). Приведем результаты расчета напряженности ЭСП с помощью теоремы Гаусса.

1) **Поле сферы** радиуса R , равномерно заряженной по поверхности, на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы ($r < R$) $E = 0$;

б) на поверхности сферы $E = \frac{kQ}{R^2}$, где Q – заряд сферы; (10)

в) вне сферы ($r > R$) $E = \frac{kQ}{r^2}$. (11)

2) **Поле нити (или цилиндра)** радиуса R для $r > R$ на расстоянии r от нити (или от оси цилиндра):

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{2k\tau}{r}, \quad (12)$$

Здесь $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$; $\tau = \frac{Q}{l}$ – линейная плотность заряда: отношение заряда нити (цилиндра) Q к длине нити l .

3) *Поле плоскости*, бесконечной и равномерно заряженной:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad (13)$$

где σ – поверхностная плотность заряда: $\sigma = \frac{Q}{S}$ – отношение заряда Q к площади плоскости S , на которой находится заряд.

1.4. Потенциал. Работа перемещения заряда в ЭСП. Связь напряженности и потенциала

Потенциал φ – энергетическая характеристика ЭСП, в данной точке поля равная отношению

$$\varphi = \frac{W}{Q_{\text{пр}}}, \quad (14)$$

где W – потенциальная энергия пробного заряда $Q_{\text{пр}}$, помещенного в данную точку ЭСП.

В поле *точечного заряда* потенциал точки, находящейся на расстоянии r от заряда:

$$\varphi = \frac{kQ}{r}, \quad (15)$$

где Q – заряд, создающий поле.

Потенциал φ – алгебраическая величина, его знак равен знаку заряда Q , создающего поле (см. формулу (15)). Потенциал ЭСП, созданного в данной точке несколькими зарядами (точечными, а также и распределенными по длине или по поверхности заряженных тел) равен *алгебраической сумме* потенциалов φ_i полей всех заряженных тел в этой точке:

$$\varphi = \sum \varphi_i, \quad (16)$$

Работа по перемещению точечного заряда Q_0 из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле определяется формулой:

$$A_{12} = -\Delta W = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (17)$$

где $(-\Delta W)$ – убыль потенциальной энергии заряда Q_0 ; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов начальной и конечной точек для заряда, перемещающегося в ЭСП.

Потенциал связан с напряженностью ЭСП следующим соотношением:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi, \quad (18)$$

где $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ – вектор градиента потенциала.

Проекция вектора напряженности E_r на направление вектора градиента потенциала

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (19)$$

Здесь $\frac{d\varphi}{dr}$ – модуль градиента потенциала.

В однородном ЭСП, в котором вектор напряженности одинаков во всех точках поля, модуль напряженности

$$E = \frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{d}, \quad (20)$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы точек двух эквипотенциальных поверхностей; d – расстояние между этими поверхностями по нормали к ним, т. е. вдоль силовой линии ЭСП.

Таким образом, имеется три способа расчета напряженности E электростатического поля:

1) С помощью принципа суперпозиции, применяемого в следующих случаях:

а) для системы точечных зарядов – по формуле (6), (см. рис. 3);

б) поле создано несколькими заряженными телами, например: нить и точечный заряд; две плоскости; плоскость и нить и т. п., – также по формуле (6);

в) для распределенного заряда – по формуле (7).

Этим методом удается найти, как правило, только значение напряженности E в одной выбранной точке; лишь в отдельных случаях, например, для ЭСП, созданного электрическим диполем, можно найти зависимость $E(r)$, т. е. напряженность поля E как функцию расстояния r от зарядов.

2) С помощью теоремы Гаусса – по формуле (9), для полей, обладающих симметрией (сферической, осевой или зеркальной). Для таких полей метод позволяет найти функцию $E(r)$ или $E(x)$ – зависимость напряженности E от расстояния от центра (оси) симметрии поля.

3) С использованием формулы связи E и φ – по формулам (19) и (20). Если известна зависимость $\varphi(r)$, то можно, используя формулу (19), путем дифференцирования найти функцию $E(r)$. По формуле (20) находят численное значение напряженности E , которое одинаково во всех точках однородного ЭСП.

1.5. Емкость проводника. Конденсаторы

Электрическая емкость C уединенного проводника, по определению,

$$C = \frac{Q}{\varphi}, \quad (21)$$

где Q – заряд проводника; φ – его потенциал.

Емкость шара

$$C = \frac{\varepsilon R}{k} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R, \quad (22)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды; R – радиус шара.

Емкость конденсатора, по определению,

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (23)$$

Здесь Q – заряд обкладки конденсатора; $U = (\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов, или напряжение на конденсаторе.

Рассчитывая $\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_1^2 E_r dr$, по формуле (23) получают следующие выражения для емкости.

Плоский конденсатор: $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$. (24)

Здесь ϵ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, находящегося между пластинами; S – площадь обкладок (одной обкладки); d – расстояние между ними.

Сферический конденсатор: $C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$, (25)

где R_1 и R_2 – радиусы концентрических сфер.

Параллельное соединение конденсаторов (рис. 6):



$$Q = \sum Q_i; \quad U = U_i;$$

$$C = \sum C_i. \quad (26)$$

Рис. 6

Последовательное соединение конденсаторов (рис. 7):



$$Q = Q_i; \quad U = \sum U_i;$$

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}. \quad (27)$$

Рис. 7

1.6. Энергия заряженного проводника и конденсатора. Энергия ЭП

Энергия W заряженного проводника емкостью C , несущего заряд Q и имеющего потенциал φ :

$$W = \frac{Q\varphi}{2}; \text{ так как } Q = C\varphi, \text{ то } W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (28)$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}, \quad (29)$$

где C – емкость конденсатора; Q и U – заряд и напряжение на обкладках конденсатора.

Объемная плотность энергии ($w = \frac{W}{V}$) электрического поля напряженностью E определяется следующей формулой:

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}, \quad (30)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, в которой существует электрическое поле.

2. РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Текст задачи следует внимательно прочитать, чтобы выяснить, какое поле (электростатическое, магнитное, постоянное или переменное) и какое физическое явление рассматривается в задаче. Полезно изобразить схему электрической цепи, схематический чертеж или рисунок.

2. Ознакомьтесь с основными формулами для данного явления. Выясните, можно ли применить *законы сохранения (ЗСЗ, ЗСЭ)* – для этого проверьте, выполняются ли в задаче условия применения закона. Выпишите законы и формулы, пригодные для решения данной задачи.

3. Запишите краткое условие задачи, выбирая для обозначения данных и искомых величин символы, которые будут использованы в формулах.

4. Задачу следует решать, как правило, в общем виде, чтобы получить расчетную формулу определяемой величины, содержащую символы заданных величин и физических постоянных.

5. Вычисление определяемой величины начинайте с подстановки в расчетную формулу значений величин. При этом следует помнить, что большинство физических величин имеют свои единицы измерения. Полезно записывать их при подстановке в формулу, чтобы убедиться, что все величины взяты в единицах СИ. Только при вычислении отношений, например, $\frac{m_2}{m_1}, \frac{E_2}{E_1}, \frac{v_2}{v_1}$ и т. п. можно подставлять значения величин в любых, но одинаковых единицах, т. е. не обязательно в СИ. Если определяемых величин несколько, то вывод расчетной формулы для следующей величины начинайте, закончив вычисление предыдущей.

6. Полезно выполнять проверку расчетной формулы на совпадение единиц измерения левой и правой части равенства. Несовпадение единиц указывает на ошибку в расчетной формуле.

7. Вычисление и запись результата делайте с точностью до двух или трех (не более) значащих цифр. Незначащие нули записывайте в виде множителя $10^{\pm n}$. При этом, если показатель степени n соответствует приставке, то используйте её: например, $B = 0,00042 \text{ Тл} = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ Тл} = 0,42 \text{ мТл}$; $E = 37\,500 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 3,75 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 37,5 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 37,5 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$. Помните, что точность результата вычислений не может быть выше, чем точность исходных данных.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.1. Закон Кулона. Взаимодействие электрических зарядов

План решения задач

1. На рисунке покажите расположение электрических зарядов в соответствии с условием задачи. При этом укажите следующие величины: 1) знаки зарядов и их символы с индексом, равным номеру

заряда; 2) обозначьте расстояния между зарядами; 3) покажите векторы сил, действующие: а) на один выбранный заряд (индекс силы совпадает с индексом заряда, со стороны которого действует сила), б) на два и более двух зарядов; в этом случае удобны индексы сил, состоящие из двух цифр, например, \vec{F}_{23} – сила, действующая на заряд Q_2 со стороны заряда Q_3 .

2. Если по условию задачи система зарядов (и каждый из них) неподвижна, то выполняются условия равновесия для каждого заряда: $\vec{F} = \sum \vec{F} = 0$, – на основании первого закона Ньютона. При этом равнодействующую силу находят как геометрическую сумму всех сил, действующих на данный заряд. Заметим, что, в соответствии с опытным принципом суперпозиции сил (независимости их действия), присутствие третьего заряда Q_3 , в том числе и помещенного между зарядами Q_1 и Q_2 , не изменяет силу взаимодействия зарядов Q_1 и Q_2 .

3. Записанные условия равновесия проецируют на координатные оси x и y ; оси проводят, как правило, так, чтобы линия действия одной из сил совпадала с осью. Из уравнений для проекций сил получают расчетную формулу определяемой величины.

Задача 1. Два положительных заряда $Q_1 = 1$ мкКл и $Q_2 = 4$ мкКл находятся на расстоянии $l = 90$ см друг от друга и могут перемещаться вдоль прямой, их соединяющей. Найдите точку на этой прямой, в которую нужно поместить отрицательный заряд Q_3 , чтобы эти три заряда находились в равновесии. Определите величину заряда Q_3 .

Дано

$$Q_1 = 1 \text{ мкКл};$$

$$Q_2 = 4 \text{ мкКл};$$

$$l = 90 \text{ см} = 0,9 \text{ м.}$$

$$r_1 - ? \quad Q_3 - ?$$

Решение

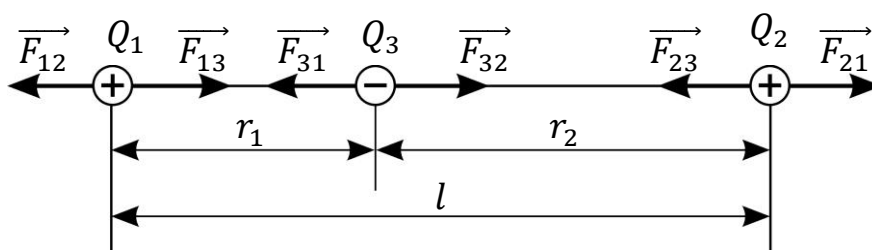


Рис. 8

Покажем на рис. 8 силы \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} взаимного отталкивания зарядов Q_1 и Q_2 . Чтобы заряды Q_1 и Q_2 были в равновесии, нужно скомпенсировать эти силы противоположно им направленными силами \vec{F}_{13} – на первый заряд и \vec{F}_{23} – на второй. Такие силы создает отрицательный заряд Q_3 , помещенный между зарядами Q_1 и Q_2 . На этот заряд Q_3 будут действовать силы \vec{F}_{31} и \vec{F}_{32} со стороны первого и второго зарядов соответственно.

Запишем условия равновесия зарядов: $\sum \vec{F} = 0$, – для каждого заряда.

$$\text{Для } Q_1: \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = 0; \quad (1)$$

$$Q_2: \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} = 0; \quad (2)$$

$$Q_3: \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = 0. \quad (3)$$

Отметим, что силы взаимодействия зарядов удовлетворяют третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}; \quad \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}; \quad \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}; \quad (4)$$

С учетом равенства модулей сил, входящих в третий закон Ньютона, и условий равновесия зарядов (1), (2) и (3) получаем, что модули всех сил парного взаимодействия зарядов одинаковы. Это очевидно и на рис. 8.

Обозначим расстояния: r_1 – заряда Q_3 от Q_1 ; r_2 – заряда Q_3 от Q_2 , при этом $r_2 = l - r_1$, – и запишем модули сил, используя закон Кулона:

$$F_{13} = F_{31} = \frac{kQ_1Q_3}{r_1^2}; \quad (5)$$

$$F_{23} = F_{32} = \frac{kQ_2Q_3}{r_2^2}; \quad (6)$$

$$F_{12} = F_{21} = \frac{kQ_1Q_2}{l^2}; \quad (7)$$

Приравниваем формулы сил (5) и (6) в соответствии с условием (3) равновесия заряда Q_3 :

$$\frac{kQ_1Q_3}{r_1^2} = \frac{kQ_2Q_3}{r_2^2}, \text{ после сокращения получаем } \frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{Q_2}{(l-r_1)^2}. \quad (8)$$

Решаем уравнение (8) с одной неизвестной величиной r_1 , извлекая из обеих частей равенства квадратный корень:

$$(l - r_1)\sqrt{Q_1} = r_1\sqrt{Q_2}; \quad \rightarrow \quad r_1 = l \frac{\sqrt{Q_1}}{(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})}. \quad (9)$$

Вычисляем $r_1 = 0,9 \text{ м} \frac{\sqrt{1 \text{ мкКл}}}{(\sqrt{1} + \sqrt{4}) \text{ мкКл}^{1/2}} = 0,3 \text{ м} = 30 \text{ см}$. Таким образом, заряд Q_3 следует поместить на расстоянии $r_1 = 30 \text{ см}$ от заряда Q_1 .

Величину заряда Q_3 найдем, приравнявая модули сил F_{13} и F_{12} , согласно условию (1) равновесия заряда Q_1 :

$$\frac{kQ_1Q_3}{r_1^2} = \frac{kQ_1Q_2}{l^2}, \text{ после сокращения имеем } \frac{Q_3}{r_1^2} = \frac{Q_2}{l^2}; \quad \rightarrow \quad Q_3 = Q_2 \left(\frac{r_1}{l}\right)^2.$$

Вычислим величину заряда $Q_3 = 4 \text{ мкКл} \cdot \left(\frac{0,3 \text{ м}}{0,9 \text{ м}}\right)^2 = \frac{4}{9} \text{ мкКл} = 0,44 \text{ мкКл}$.

Задача 2. Два шарика одинаковых радиуса R и массы m подвешены на нитях одинаковой длины $l = 40 \text{ см}$ так, что они соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $Q = 1,2 \text{ мкКл}$ каждому, они оттолкнулись друг от друга, а нити образовали угол $2\alpha = 120^\circ$. Найдите массу шарика и силу натяжения нити. Примите, что $R \ll l$.

Дано

$$l = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м};$$

$$Q = 1,2 \text{ мкКл};$$

$$2\alpha = 120^\circ;$$

$$R \ll l.$$

$$m - ? \quad T - ?$$

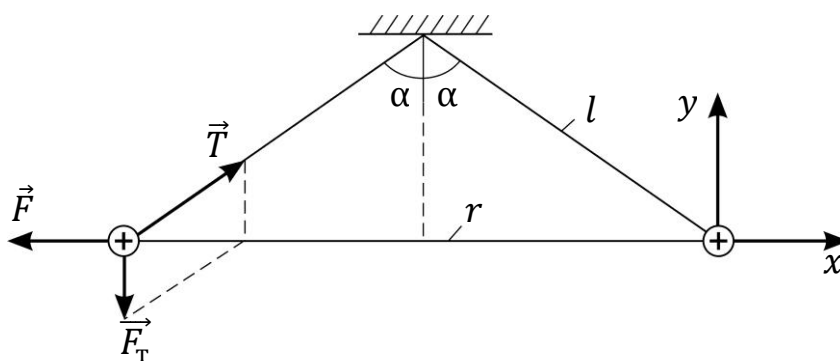
Решение

Рис. 9

На каждый шарик действуют три силы (рис. 9): сила тяжести $\vec{F}_T = m\vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и сила отталкивания одноименных зарядов \vec{F} . Учитывая, что размер шарика $R \ll l$, а расстояние между ними r близко к величине l , заключаем, что $R \ll r$, следовательно, шарики можно считать точечными зарядами, сила взаимодействия которых определяется законом Кулона:

$$F = \frac{kQ \cdot Q}{r^2}, \quad (1)$$

где r – расстояние между шариками (см. рис. 9): $\frac{r}{2} = l \sin \alpha$.

Запишем условие равновесия шарика:

$$\sum \vec{F} = 0, \text{ или } \vec{F}_T + \vec{T} + \vec{F} = 0. \quad (2)$$

Представим уравнение (2) в проекциях на оси x и y :

$$ox: T \sin \alpha - F = 0; \quad (3)$$

$$oy: -mg + T \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

Система уравнений (3) и (4) содержит две неизвестных величины: m и T . Исключим величину T путем деления одного уравнения на другое, предварительно записав их в следующем виде:

$$T \sin \alpha = F;$$

$$T \cos \alpha = mg;$$

$$\frac{F}{mg} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (5)$$

Выразим определяемую величину массы шарика m , учитывая закон Кулона (1):

$$m = \frac{F}{g \operatorname{tg} \alpha} = \frac{kQ^2}{(2l \sin \alpha)^2 g \operatorname{tg} \alpha}. \quad (6)$$

Вычисляем массу шарика

$$m = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot 1,2^2 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2}{\left(2 \cdot 0,4 \text{ м} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 9,8 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \cdot \sqrt{3}} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 1,6 \text{ г}.$$

Силу натяжения нити находим из уравнения (4):

$$T = \frac{mg}{\cos \alpha}; \quad \text{Вычисляем } T = \frac{1,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{0,5} = 31 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 31 \text{ мН}.$$

Задача 3. Два заряженных шарика одинаковых радиуса R и массы m подвешены на нитях равной длины l и опущены в жидкий диэлектрик, плотность которого $\rho = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 2$. Определите плотность ρ_0 материала шариков, если углы расхождения нитей в воздухе и в диэлектрике одинаковы. Примите, что $R \ll l$.

Дано

$$\rho = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\epsilon = 2;$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha;$$

$$R \ll l.$$

$$\rho_0 - ?$$

Решение

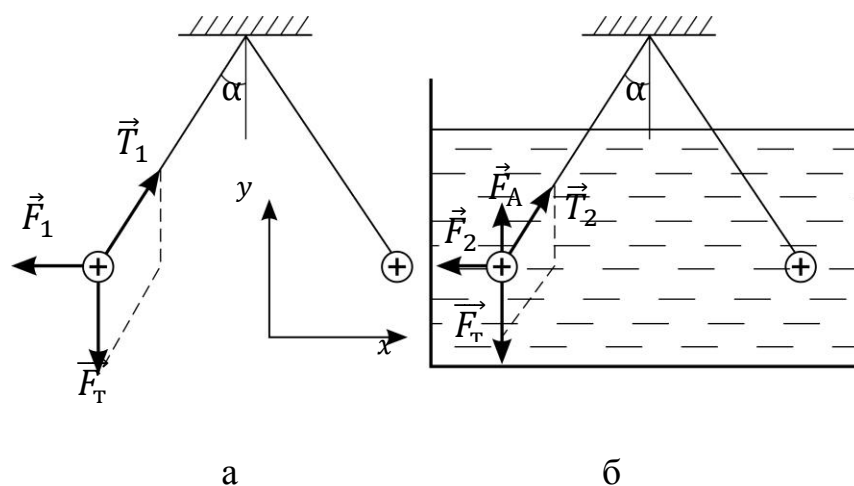


Рис. 10

На каждый шарик в воздухе действуют три силы (рис. 10 а): сила тяжести $\vec{F}_T = m\vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T}_1 и сила отталкивания одноименных зарядов шариков \vec{F}_1 . Учитывая, что размер шарика $R \ll l$, а расстояние между ними r близко к величине l , заключаем, что $R \ll r$; следовательно, шарики можно считать точечными зарядами, сила взаимодействия которых определяется законом Кулона:

$$F_1 = \frac{kQ_1Q_2}{r^2}, \quad (1)$$

где r – расстояние между шариками (см. рис. 9: $\frac{r}{2} = l \sin \alpha$).

Запишем условие равновесия шарика:

$$\vec{F}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_T = 0. \quad (2)$$

В проекциях на оси x и y уравнение (2) представится в виде:

$$ox: -F_1 + T_1 \sin \alpha = 0; \quad (3)$$

$$oy: T_1 \cos \alpha - mg = 0. \quad (4)$$

Исключая неизвестную величину T_1 путем деления уравнения (3) на уравнение (4), получаем выражение

$$\frac{F_1}{mg} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha. \quad (5)$$

В диэлектрике (рис. 10 б) в условие равновесия добавляется сила Архимеда $F_A = \rho Vg$, где ρ – плотность жидкости; V – объем шарика; g – ускорение свободного падения. При этом условие равновесия принимает следующий вид:

$$\vec{F}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_T + \vec{F}_A = 0. \quad (6)$$

Запишем уравнение (6) в проекциях на оси x и y :

$$ox: -F_2 + T_2 \sin \alpha = 0; \quad (7)$$

$$oy: T_2 \cos \alpha - mg + \rho Vg = 0. \quad (8)$$

По аналогии решением системы уравнений (3) и (4), исключаем силу натяжения нитей T_2 и получаем соотношение

$$\frac{F_2}{mg - \rho Vg} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

Так как угол расхождения нитей α и величина $\operatorname{tg} \alpha$ одна и та же в уравнениях (5) и (9), приравниваем левые части этих уравнений:

$$\frac{F_1}{mg} = \frac{F_2}{mg - \rho Vg}. \quad (10)$$

Сила взаимодействия зарядов в диэлектрике в ϵ раз меньше, чем в воздухе:

$$F_2 = \frac{F_1}{\epsilon}. \quad (11)$$

Массу шарика выразим через плотность материала ρ_0 и объем шарика V :

$$m = \rho_0 V. \quad (12)$$

С учетом формул (11) и (12) равенство (10) перепишем в следующем виде:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{mg - \rho Vg}{mg}; \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\epsilon} = 1 - \frac{\rho Vg}{\rho_0 Vg}; \quad \text{тогда} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{\epsilon} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}.$$

Из последнего выражения получаем расчетную формулу плотности материала шариков в виде:

$$\rho_0 = \rho \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}; \quad \text{вычисляем} \quad \rho_0 = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{2}{(2-1)} = 1600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

3.2. Расчет напряженности и потенциала электростатического поля с помощью принципа суперпозиции

План решения задач

1. Изобразите на рисунке схему расположения точечных зарядов или заряженных тел в соответствии с условием задачи. На схеме:

1) покажите знаки зарядов и их символы с индексом, равным номеру заряда; 2) обозначьте точку, в которой нужно определить величины напряженности и потенциала ЭСП, например, точка А.

2. Запишите принцип суперпозиции для расчета напряженности поля в следующем виде:

а) если ЭСП создается системой точечных зарядов или заряженных тел, то

$$\vec{E}_A = \sum \vec{E}, \quad (1)$$

где \vec{E} – вектор напряженности поля i -того заряда или заряженного тела; число слагаемых в уравнении (1) равно числу зарядов, создающих поле;
 б) если ЭСП создается зарядом, распределенным равномерно, например, по длине заряженного тела, тогда

$$\vec{E}_A = \int_Q d\vec{E}, \quad (2)$$

где $d\vec{E}$ – бесконечно малый вектор напряженности, создаваемый элементарным зарядом dQ , выделенным на заряженном теле.

3. Так как в уравнениях (1) и (2) записана сумма векторов, которые следует складывать геометрически, то необходимо показать на рисунке направления суммируемых векторов. Для этого мысленно помещают в исследуемую точку поля A пробный положительный заряд $Q_{\text{пр}}^+$ и показывают направление сил \vec{F} , действующих на этот пробный заряд со стороны каждого i -того заряда (естественно, что векторы всех сил, приложенных к заряду $Q_{\text{пр}}^+$, начинаются в точке A). Поскольку векторы напряженности $\vec{E} \parallel \vec{F}$, то обозначают изображенные векторы символами \vec{E} , где индекс величины совпадает с индексом заряда, создающего поле. Аналогично определяют направление векторов $d\vec{E}$ и $d\vec{E}'$ от бесконечно малых точечных зарядов dQ и dQ' , которые выбирают, как правило, в точках заряженного тела, расположенных симметрично относительно его оси симметрии.

4. Сложение двух векторов \vec{E} обычно выполняют с помощью правила параллелограмма (или треугольника); при этом модуль определяемого результирующего вектора находят по теореме косинусов. Если число складываемых векторов равно трем и более, в том числе и при суммировании бесконечно малых векторов $d\vec{E}$, то находят проекции результирующего вектора E_x и E_y на координатные оси x и y , проецируя на эти оси каждый из суммируемых векторов. В этом случае модуль результирующего вектора определяют с помощью теоремы Пифагора: $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$. Оси направляют таким образом, чтобы удобно было записывать проекции E_x и E_y , т. е. чтобы были известны углы, образованные векторами \vec{E} с осями координат. Либо одну из осей проводят по предполагаемому направлению результирующего вектора \vec{E} , которое можно определить, используя симметрию в расположении зарядов, если таковая имеется.

5. Потенциал электростатического поля в исследуемой точке A находят также с помощью принципа суперпозиции:

$$\varphi_A = \sum \varphi_i, \text{ или } \varphi_A = \int_Q d\varphi, \quad (3)$$

алгебраически суммируя потенциалы, которые создаются в данной точке A заряженными телами, в том числе, точечными зарядами Q_i или бесконечно

малыми точечными зарядами dQ . При этом суммировании знаки потенциалов φ_i равны знакам соответствующих i -тых зарядов, в частности, отрицательный заряд создает в точке А электростатическое поле с отрицательным значением потенциала.

Задача 4. Два точечных заряда $Q_1 = 10$ нКл и $Q_2 = -15$ нКл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной $r = 9$ см. Определите напряженность \vec{E} электростатического поля и его потенциал в точке А, находящейся в третьей вершине.

Дано

$$Q_1 = 10 \text{ нКл} = 10^{-8} \text{ Кл};$$

$$Q_2 = -1,5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл};$$

$$r = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

$$1) \vec{E} - ? \quad 2) \varphi - ?$$

Решение

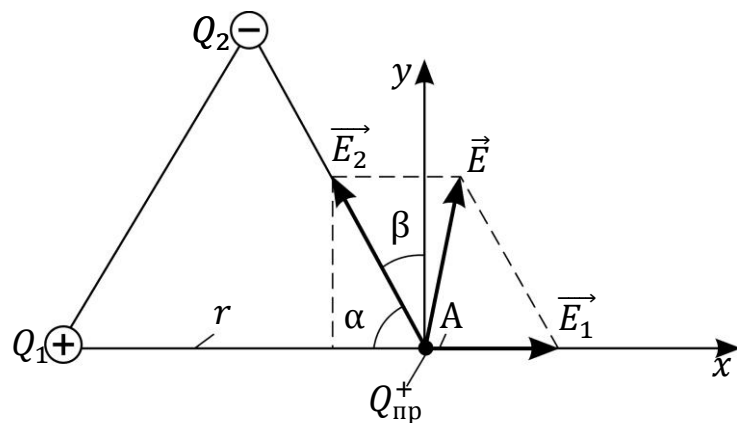


Рис. 11

Расположение зарядов Q_1 и Q_2 относительно точки А показано на рис. 11.

1) Для расчета напряженности \vec{E} используем принцип суперпозиции ЭСП в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (1)$$

где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 – напряженности полей, создаваемых в точке А зарядами Q_1 и Q_2 соответственно.

Чтобы определить направление складываемых векторов, в точку А мысленно помещаем пробный заряд $Q_{пр}^+$ и рассматриваем действующие на него силы: первый заряд Q_1^+ отталкивает заряд $Q_{пр}^+$ силой \vec{F}_1 , направленной по линии соединяющей заряды Q_1 и $Q_{пр}^+$, а второй – отрицательный заряд Q_2^- притягивает к себе положительный заряд $Q_{пр}^+$ силой \vec{F}_2 , также направленной по линии, соединяющей заряды Q_2 и $Q_{пр}^+$. Напряженность поля, создаваемого i -тым зарядом, $\vec{E} \parallel \vec{F}$, т. е. совпадает по направлению с соответствующей силой.

Модуль результирующего вектора E можно найти любым из двух способов: а) по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos \alpha}, \quad (2)$$

где напряженности ЭСП, создаваемого точечными зарядами Q_1 и Q_2 в точке А, находящейся на расстоянии r от каждого заряда:

$$E_1 = \frac{kQ_1}{r^2}, \quad E_2 = \frac{kQ_2}{r^2}; \quad (3)$$

б) по проекциям принципа суперпозиции (1) на координатные оси x и y :

$$E_x = E_{1x} + E_{2x}; \quad (4)$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y}. \quad (5)$$

Ось x направляем вдоль вектора \vec{E}_1 , при этом вектор \vec{E}_2 образует известные углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 90^\circ - \alpha = 30^\circ$ с осями x и y (см. рис. 11). Следовательно, проекции результирующего вектора E : E_x и E_y , – на координатные оси x и y , будут определяться выражениями:

$$E_x = E_1 - E_2 \cos 60^\circ;$$

$$E_y = E_2 \cos 30^\circ.$$

В результате

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(E_1 - E_2 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \left(E_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}. \quad (6)$$

Подставим формулы (3) для напряженностей E_1 и E_2 в выражение (6) и, вынося одинаковый сомножитель $\left(\frac{k}{r^2}\right)$ за скобки и из радикала, получим следующую расчетную формулу величины E :

$$E = \sqrt{\left(\frac{kQ_1}{r^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{kQ_2}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{kQ_2}{r^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}; \rightarrow E = \frac{k}{r^2} \sqrt{\left(Q_1 - \frac{Q_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} Q_2\right)^2}. \quad (7)$$

Вычисляем по формуле (7) напряженность электростатического поля в точке А, заметив, что при этом нужно подставлять *модуль отрицательного заряда* Q_2 , поскольку знак его уже учтен в направлении вектора \vec{E}_2 :

$$E = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}}}{9^2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \sqrt{\left(1 - \frac{1,5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1,5\right)^2} \cdot 10^{-8} \text{ Кл} = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 17 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

2) Расчет потенциала φ в точке А электростатического поля выполняем, используя принцип суперпозиции:

$$\varphi = \varphi_1^+ + \varphi_2^-, \quad (8)$$

где потенциалы ЭСП, созданного точечными зарядами Q_1 и Q_2 в точке А, находящейся на расстоянии r от каждого заряда, определяются следующими формулами:

$$\varphi_1^+ = \frac{kQ_1^+}{r}; \quad \varphi_2^- = \frac{kQ_2^-}{r}. \quad (9)$$

С учетом этих формул равенство (8) запишется в виде:

$$\varphi = \frac{k}{r} (Q_1^+ + Q_2^-). \quad (10)$$

В полученной расчетной формуле каждый заряд записывается с его знаком, так как только в этом случае получим алгебраическую сумму потенциалов полей, создаваемых отдельными зарядами. Вычислим потенциал в исследуемой точке электростатического поля по формуле (10):

$$\varphi = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}}}{9 \cdot 10^{-2} \text{М}} (1,0 - 1,5) \cdot 10^{-8} \text{Кл} = -0,5 \cdot 10^3 \text{В} = -500 \text{В} = -0,5 \text{кВ}.$$

Задача 5. Четыре точечных заряда $Q_1 = 10$ нКл, $Q_2 = -5$ нКл, $Q_3 = 7$ нКл и $Q_4 = 10$ нКл, расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Определите напряженность \vec{E} электростатического поля и его потенциал φ в точке O пересечения диагоналей квадрата.

Дано

$$Q_1 = 10 \text{ нКл} = 10^{-8} \text{ Кл};$$

$$Q_2 = -5 \text{ нКл};$$

$$Q_3 = 7 \text{ нКл};$$

$$Q_4 = 10 \text{ нКл};$$

$$a = 10 \text{ см}.$$

$$1) \vec{E} - ?$$

$$2) \varphi - ?$$

Решение

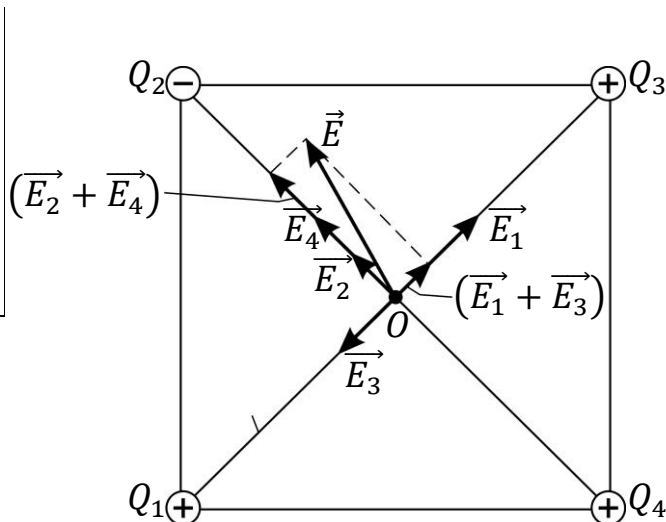


Рис. 12

Расположение зарядов в вершинах квадрата показано на рис. 12.

1) Для расчета напряженности вектора \vec{E} в точке O используем принцип суперпозиции электростатического поля в виде:

$$\vec{E} = \sum \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4, \quad (1)$$

где $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4$ – напряженности полей, создаваемых в точке O зарядами Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 соответственно.

Для определения направления суммируемых векторов в исследуемую точку поля O мысленно помещаем пробный положительный заряд $Q_{\text{пр}}^+$ и рассматриваем действующие на него силы: каждая сила направлена по линии, соединяющей пробный заряд и заряд Q_i и приложена к пробному заряду в точке O . При этом положительные заряды Q_1, Q_3 и Q_4 отталкивают от себя $Q_{\text{пр}}^+$, а отрицательный заряд Q_2 притягивает к себе $Q_{\text{пр}}^+$. По направлениям этих сил \vec{F} , действующих на пробный заряд, направлены соответствующие векторы напряженностей \vec{E} (см. рис. 12).

Векторы, направленные по одной прямой (коллинеарные) складываем попарно:

$$(\vec{E}_1 + \vec{E}_3) = \vec{E}_{1,3}; \text{ так как } \vec{E}_3 \uparrow \downarrow \vec{E}_1, \text{ то модуль вектора } E_{1,3} = E_1 - E_3; \quad (2)$$

$$(\vec{E}_2 + \vec{E}_4) = \vec{E}_{2,4}; \text{ так как } \vec{E}_4 \uparrow \vec{E}_2, \text{ то модуль вектора } E_{2,4} = E_2 + E_4. \quad (3)$$

Учитывая эти равенства, принцип суперпозиции (1) перепишем в следующем виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_{1,3} + \vec{E}_{2,4}. \quad (4)$$

Так как векторы $\vec{E}_{1,3}$ и $\vec{E}_{2,4}$ взаимно перпендикулярны, то их складываем по правилу параллелограмма (треугольника); при этом модуль результирующего вектора определяем с помощью теоремы Пифагора:

$$E = \sqrt{(E_{1,3})^2 + (E_{2,4})^2}.$$

С учетом формул (2) и (3) модуль напряженности ЭСП в точке O

$$E = \sqrt{(E_1 - E_3)^2 + (E_2 + E_4)^2}. \quad (5)$$

Напряженность ЭСП, создаваемого точечным зарядом Q_i :

$$E = \frac{kQ_i}{r^2}, \quad (6)$$

где $r = a \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ – расстояние от точечного заряда до точки O в ЭСП. Подставляя напряженности E согласно формуле (6) в равенство (5) и вынося одинаковый множитель $\left(\frac{k}{r^2}\right)$ за скобки и из радикала, получим расчетную формулу для величины напряженности E в следующем виде:

$$E = \frac{k}{\frac{1}{2}a^2} \sqrt{(Q_1 - Q_3)^2 + (Q_2 + Q_4)^2}. \quad (7)$$

Вычисляя по формуле (7) напряженность поля в точке O , заметим, что при этом в формулу следует подставить *модуль отрицательного заряда* Q_2 , так как знак его уже учтен в изображении вектора \vec{E}_2 на рис. 12.

$$E = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{В}}{\text{м}}}{\frac{1}{2}(0,1)^2 \text{ м}^2} \sqrt{(10 - 7)^2 + (5 + 10)^2} \cdot 10^{-9} \text{ Кл} = 2,8 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 28 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

2) Рассчитываем потенциал φ электростатического поля в точке O с помощью принципа суперпозиции:

$$\varphi = \sum \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4, \quad (8)$$

где φ_i – потенциал поля, создаваемого точечным зарядом Q_i в точке O , находящейся на расстоянии r от заряда:

$$\varphi_i = \frac{kQ_i}{r}. \quad (9)$$

Подставляя формулы (9) в равенство (8), получаем следующую расчетную формулу для потенциала ЭСП в точке O :

$$\varphi = \frac{k}{\frac{\sqrt{2}a}{2}} (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4). \quad (10)$$

Здесь заряды записываются с их знаками: так как отрицательный заряд Q_2 создает поле с отрицательным потенциалом, то $\varphi_2 < 0$. Вычисляем потенциал точки O электростатического поля по формуле (10):

$$\varphi = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\Phi}}{\frac{\sqrt{2}}{2} 0,1 \text{ м}} (10 - 5 + 7 + 10) \cdot 10^{-9} \text{ Кл} = 2,8 \cdot 10^3 \text{ В} = 2,8 \text{ кВ}.$$

Задача 6. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 3 \text{ см}$ находятся четыре положительных и два отрицательных точечных заряда; все заряды имеют одинаковый модуль $Q = 2 \text{ нКл}$. Определите напряженность \vec{E} электростатического поля и потенциал φ в центре шестиугольника при трех различных вариантах расположения этих зарядов.

Дано

$$a = 0,03 \text{ м};$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 2 \text{ нКл};$$

$$Q_5 = Q_6 = -2 \text{ нКл};$$

$$\vec{E} - ? \quad \varphi - ?$$

в вариантах 1, 2 и 3.

Решение

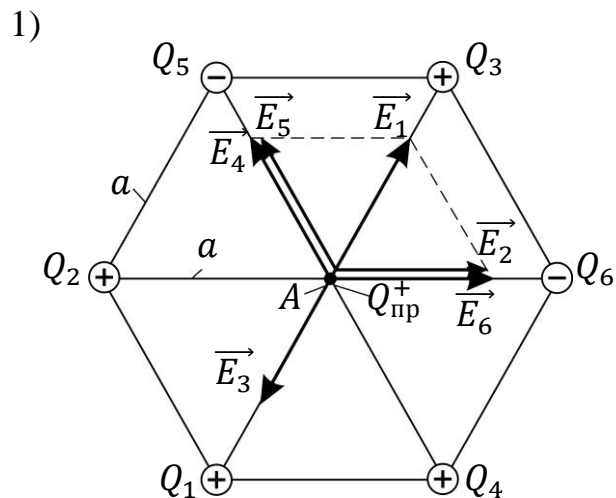


Рис. 13

Для расчета в центре шестиугольника (в точке A) напряженности \vec{E} электростатического поля, создаваемого системой из шести точечных зарядов, используем принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum_1^6 \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5 + \vec{E}_6, \quad (1)$$

где \vec{E} – вектор напряженности поля, создаваемого в точке A i -тым зарядом (Q); индекс вектора \vec{E} совпадает с индексом заряда Q .

Чтобы определить направления суммируемых векторов, в точку A мысленно поместим пробный положительный заряд $Q_{\text{пр}}^+$ и покажем направления действующих на него сил со стороны i -тых зарядов: все силы направлены вдоль линий, соединяющих пробный заряд $Q_{\text{пр}}^+$ с зарядом Q . При этом положительные заряды Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 отталкивают от себя пробный заряд, а отрицательные Q_5 и Q_6 – притягивают к себе $Q_{\text{пр}}^+$. По направлениям сил \vec{F} , действующих на пробный заряд, направлены соответствующие векторы напряженности \vec{E} (рис. 13).

Векторы, направленные вдоль одной прямой (коллинеарные), складываем попарно, учитывая, что модули всех векторов одинаковы:

$$E = \frac{kQ}{a^2}. \quad (2)$$

С учетом направления векторов \vec{E} в точке A (см. рис. 13), перепишем равенство (1) в виде:

$$\vec{E} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_3) + (\vec{E}_2 + \vec{E}_6) + (\vec{E}_4 + \vec{E}_5). \quad (1a)$$

Так как вектор $\vec{E}_3 \updownarrow \vec{E}_1$, то их сумма $\vec{E}_1 + \vec{E}_3 = 0$; сумма сонаправленных векторов: $\vec{E}_2 + \vec{E}_6 = 2\vec{E}_2$, и $\vec{E}_4 + \vec{E}_5 = 2\vec{E}_4$.

С учетом этих соотношений принцип суперпозиции (1a) перепишем в следующем виде:

$$\vec{E} = 2\vec{E}_2 + 2\vec{E}_4 = 2(\vec{E}_2 + \vec{E}_4). \quad (3)$$

Векторы \vec{E}_2 и \vec{E}_4 складываем по правилу параллелограмма (треугольника). Так как диагонали шестиугольника разделяют его площадь на равносторонние треугольники, то по рис. 13 видно, что $(\vec{E}_2 + \vec{E}_4) = \vec{E}_1$. Тогда результирующий вектор напряженности ЭСП в точке A

$$\vec{E} = 2\vec{E}_1.$$

С учетом формулы (2) модуль этого вектора

$$E = 2E_1 = \frac{2kQ}{a^2}. \quad (4)$$

Вычисляем напряженность ЭСП в исследуемой точке A :

$$E = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{3^2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 4 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 40 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Потенциал электростатического поля в точке A определяется по принципу суперпозиции как алгебраическая сумма потенциалов полей, создаваемых шестью точечными зарядами:

$$\varphi = \sum_1^6 \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6, \quad (5)$$

где φ_i – потенциал поля, создаваемого точечным зарядом Q_i в точке A , находящейся на расстоянии $r = a$ от заряда; он определяется следующей формулой:

$$\varphi_i = \frac{kQ}{a}.$$

Поскольку все заряды одинаковы по модулю и находятся на одинаковом расстоянии a от исследуемой точки поля A , то слагаемые в уравнении (5) различаются только знаком; при этом, согласно условию задачи, имеем

$$(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = 4\varphi_1 > 0;$$

$$(\varphi_5 + \varphi_6) = -2\varphi_1 < 0.$$

В соответствии с уравнением (5) сумма этих потенциалов

$$\varphi = 4\varphi_1 - 2\varphi_1 = 2\varphi_1 = \frac{2kQ_1}{a}. \quad (6)$$

Величина φ , определяемая уравнением (6), не изменяется при любом варианте размещения данных зарядов в вершинах шестиугольника.

Вычисляем потенциал электростатического поля в точке A :

$$\varphi = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{3 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ В} = 1,2 \text{ кВ}.$$

2)

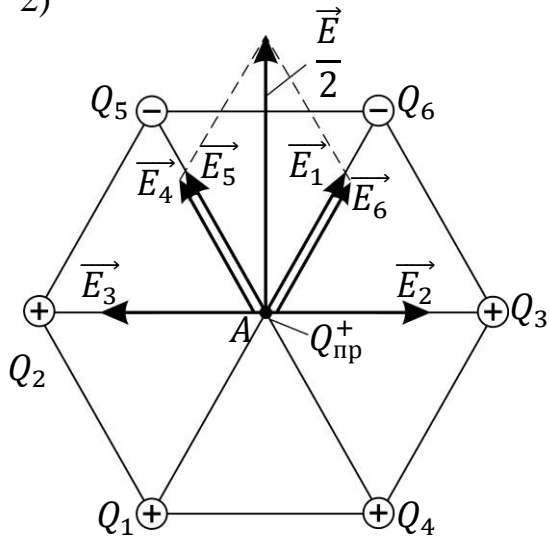


Рис. 14

Для второго варианта размещения зарядов на рис. 14 также покажем векторы всех сил, действующих на пробный заряд $Q_{\text{пр}}^+$, помещенный в точку A , и $\vec{E} \parallel \vec{F}$. По принципу суперпозиции полей (1) складываем векторы напряженности \vec{E} , как рассмотрено выше, т. е. попарно:

$$\vec{E} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_6) + (\vec{E}_2 + \vec{E}_3) + (\vec{E}_4 + \vec{E}_5)$$

$$= 2\vec{E}_1 + 0 + 2\vec{E}_4 = 2(\vec{E}_1 + \vec{E}_4), \quad (7)$$

где модуль напряженности $E_1 = E_4 = \frac{kQ_1}{a^2}$, – в соответствии с формулой (2).

Модуль результирующего вектора \vec{E} определяем из треугольника на рис. 14 по теореме косинусов, в соответствии с уравнением (7):

$$E = 2\sqrt{E_1^2 + E_4^2 - 2E_1E_4\cos 120^\circ} = 2E_1\sqrt{1 + 1 - 2(-\frac{1}{2})} = 2\sqrt{3}E_1. \quad (8)$$

Сравнивая формулы (8) и (4), отмечаем, что в данном варианте размещения зарядов напряженность в $\sqrt{3}$ раз больше, чем в первом случае:

$$E = \sqrt{3} \cdot 40 \frac{\text{кВ}}{\text{м}} = 69 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

3)

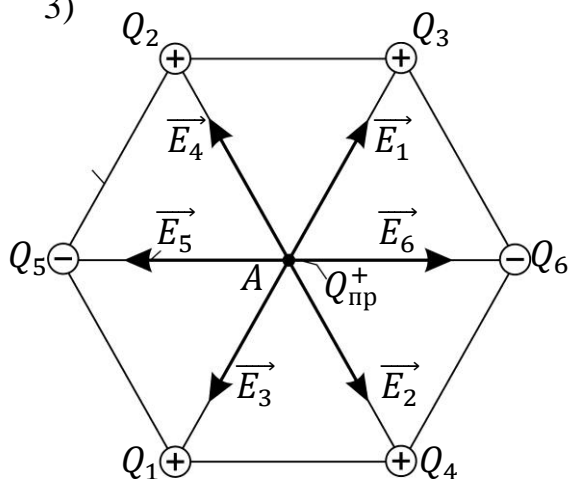


Рис. 15

Направления напряженностей \vec{E} полей, созданных в точке A каждым точечным зарядом, показаны на рис. 15. Складываем векторы \vec{E} , согласно принципу суперпозиции ЭСП (1); при этом выделяем пары векторов, которые направлены по одной линии:

$$\vec{E} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_3) + (\vec{E}_2 + \vec{E}_4) + (\vec{E}_5 + \vec{E}_6).$$

В последнем уравнении векторы, заключенные в скобки, равны по модулю и противоположны по направлению;

следовательно, их сумма равна нулю. Соответственно, и результирующий вектор $\vec{E} = \vec{0}$, так как поля, созданные зарядами одинакового знака, в точке A взаимно компенсируются.

Задача 7. Электростатическое поле создается нитью длиной $l = 0,8$ м, несущей заряд $Q = 5$ нКл, равномерно распределенный по длине нити.

Определите напряженность \vec{E} и потенциал φ в точке A , лежащей на продолжении нити на расстоянии $a = 40$ см от ближайшего ее конца.

Дано

$$l = 0,8 \text{ м};$$

$$Q = 5 \text{ нКл};$$

$$a = 0,40 \text{ м}.$$

1) \vec{E} – ?

2) φ – ?

Решение

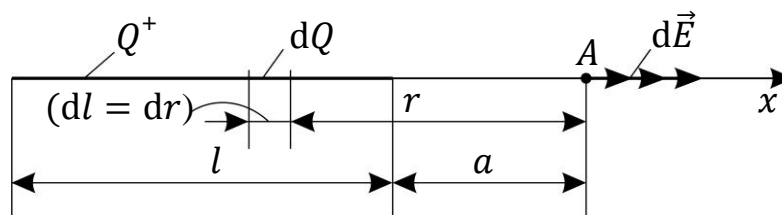


Рис. 16

1) Размер заряженного тела – длина нити l , соизмерим с расстоянием a от нити до исследуемой точки поля A , следовательно, заряд нити не является точечным. В таких случаях мысленно разделяют заряд нити на элементарные заряды dQ и суммируют создаваемые ими в точке A поля напряженностью $d\vec{E}$ (рис. 16).

Чтобы определить направление векторов $d\vec{E}$ в точке A , мысленно поместим в эту точку пробный положительный заряд $Q_{\text{пр}}^+$ и покажем векторы сил $d\vec{F}$, действующих со стороны элементарных зарядов нити dQ на пробный заряд. Векторы $d\vec{F}$ направлены по линии, соединяющей заряды dQ и $Q_{\text{пр}}^+$, а векторы $d\vec{E} \parallel d\vec{F}$, следовательно, все бесконечно малые векторы напряженности $d\vec{E}$ полей элементарных зарядов нити dQ направлены вдоль оси x , т. е. параллельны друг другу.

Результирующий вектор \vec{E} , согласно принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \int_Q d\vec{E}, \quad (1)$$

в этом случае направлен вдоль оси x , а его модуль равен сумме модулей складываемых векторов:

$$E = \int_Q dE, \quad (2)$$

где напряженность поля dE , создаваемого точечным зарядом dQ , который находится на участке бесконечно малой длины dl , определяется формулой

$$dE = \frac{kdQ}{r^2}. \quad (3)$$

Здесь величина заряда $dQ = \tau dl$, где $\tau = \frac{Q}{l}$ – линейная плотность заряда нити; r – расстояние от заряда dQ до исследуемой точки поля A .

Подставим формулу (3) в уравнение принципа суперпозиции (2), заменяя элемент длины участка нити dl равной ему величиной dr , – бесконечно малым приращением переменной r . Определим пределы интегрирования по этой переменной. В уравнении (2) суммируются поля напряженностью dE всех элементарных зарядов нити dQ , начиная с расположенного на расстоянии $r = a$ от точки поля A и заканчивая

зарядом, находящимся на другом конце нити, – на расстоянии $r = (a + l)$ от исследуемой точки. Проинтегрируем в указанных пределах:

$$E = \int_Q dE = \int_l \frac{k\tau dl}{r^2} = k\tau \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \left(k\tau \left(-\frac{1}{r} \right) \right); \rightarrow$$

$$E = \frac{kQ}{l} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = \frac{kQ}{a(a+l)}. \quad (4)$$

Проверим полученную расчетную формулу путем экстраполяции зависимости (4): увеличим расстояние a от конца нити до точки A так, чтобы $a \gg l$; при этом условии заряженную нить можно принять за точечный заряд, а в формуле (4) полагать расстояние $(a + l) \approx a$, вследствие малости второго слагаемого. Таким образом, из формулы (4) получаем величину $E = \frac{kQ}{a^2}$, равную напряженности поля, создаваемого точечным зарядом Q в точке поля, находящейся на расстоянии a от заряда. Следовательно, полученная формула (4) верна.

Вычисляем напряженность поля нити в точке A по формуле (4):

$$E = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{0,4 \text{ м} (0,4 + 0,8) \text{ м}} = 281 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

2) Рассчитаем потенциал φ электростатического поля в точке A , используя принцип суперпозиции: суммируя бесконечно малые величины потенциала $d\varphi$ полей, создаваемых элементарными зарядами dQ :

$$\varphi = \int_0^\varphi d\varphi = \int_Q \frac{kdQ}{r} = \int_a^{a+l} \frac{k\tau dr}{r} = k\tau (\ln(a + l) - \ln a); \rightarrow$$

$$\varphi = \frac{kQ}{l} \ln \left(\frac{a+l}{a} \right) = \frac{kQ}{l} \ln \left(1 + \frac{l}{a} \right). \quad (5)$$

Полученную формулу (5) также проверим на предельный случай точечного заряда: нить на расстоянии $a \gg l$; при этом используем формулу приближенных вычислений $\ln \left(1 + \frac{l}{a} \right) \approx \frac{l}{a}$, так как $\frac{l}{a} \ll 1$. Подставляя это значение логарифма в выражение (5) получаем формулу в виде $\varphi = \frac{kQ}{a}$ – как для потенциала поля, созданного точечным зарядом Q . Следовательно, полученная формула (5) верна.

Вычисляем по формуле (5) потенциал поля в заданной точке A :

$$\varphi = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot \ln \left(1 + \frac{0,8 \text{ м}}{0,4 \text{ м}} \right)}{0,8 \text{ м}} = 185 \text{ В}.$$

Задача 8. Электростатическое поле создается нитью длиной $l = 1,5$ м, с зарядом $Q = 1$ мкКл, равномерно распределенным по длине. Определите напряженность \vec{E} и потенциал φ поля в точке A (рис. 17), находящейся на расстоянии $r_0 = 0,5$ м от нити и равноудаленной от ее концов.

Дано

$l = 1,5 \text{ м};$
 $Q = 1 \text{ мкКл};$
 $r_0 = 0,5 \text{ м}.$

- 1) $\vec{E} - ?$
 2) $\varphi - ?$

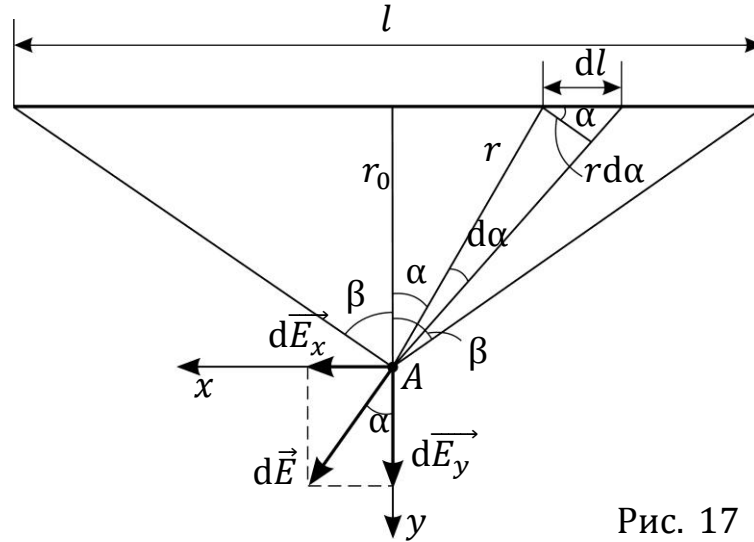
Решение

Рис. 17

1) Заряд Q , находящийся на нити, не является точечным, так как расстояние от заряда до точки A соизмеримо с длиной заряженной нити. Поэтому мысленно разбиваем заряд нити на бесконечно малые заряды dQ , каждый из которых создает в точке A поле напряженностью $d\vec{E}$. Направление вектора $d\vec{E}$ определяем, как обычно, помещая в точку A пробный положительный заряд $Q_{\text{пр}}^+$; на него со стороны заряда dQ будет действовать сила отталкивания $d\vec{F}$, направленная вдоль линии, соединяющей заряды dQ и $Q_{\text{пр}}^+$, а вектор $d\vec{E} \uparrow d\vec{F}$.

Вектор напряженности \vec{E} электростатического поля в точке A найдем по принципу суперпозиции, суммируя векторы $d\vec{E}$ от всех зарядов dQ , расположенных на нити:

$$\vec{E} = \int_Q d\vec{E}. \quad (1)$$

Векторы $d\vec{E}$ ориентированы различно, образуя «веер» векторов, лежащих в плоскости XU . Для сложения этих векторов разложим каждый на составляющие по осям x и y (см. рис. 17):

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y. \quad (2)$$

С учетом последнего равенства уравнение (1) перепишем в виде:

$$\vec{E} = \int_Q dE_x + \int_Q dE_y. \quad (3)$$

Здесь проекции вектора $d\vec{E}$ находим из треугольника (см. рис. 17):

$$dE_x = dE \sin \alpha; \quad dE_y = dE \cos \alpha; \quad \text{где } dE = \frac{k dQ}{r^2}. \quad (4)$$

Подстановка формул (4) в уравнение (3) дает следующее равенство:

$$\vec{E} = \int_Q \frac{k dQ}{r^2} \sin \alpha + \int_Q \frac{k dQ}{r^2} \cos \alpha. \quad (5)$$

В подинтегральных выражениях уравнения (5) содержатся три переменных: расстояние r , заряд dQ и угол α . Перейдем к одной переменной – к углу α . Заряд $dQ = \tau dl$, где $\tau = \frac{Q}{l}$ – линейная плотность заряда нити; dl – элемент длины нити. Для двух малых треугольников (см. рис. 17) приравняем общую сторону:

$$dl \cos \alpha = r d\alpha; \rightarrow dl = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}.$$

Здесь и в равенстве (5) расстояние r от точечного заряда dQ до точки A :

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha}.$$

Заменим переменные dl и r в подинтегральных выражениях, преобразуя уравнение (5), и выполним интегрирование:

$$\vec{E} = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{k\tau \sin \alpha d\alpha}{r_0} + \int_{-\beta}^{\beta} \frac{k\tau \cos \alpha d\alpha}{r_0} = \frac{k\tau}{r_0} (\cos(-\beta) - \cos\beta) + \frac{k\tau}{r_0} (\sin\beta - \sin(-\beta)) = 0 + \frac{k\tau}{r_0} 2\sin\beta, \quad (6)$$

$$\text{где } \sin \beta = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2r_0}{l}\right)^2}}.$$

Первый интеграл в выражении (5), равный \vec{E}_x , обращается в нуль, так как составляющие $d\vec{E}_x$ от зарядов dQ правой части нити компенсируются векторами $d\vec{E}_x' \uparrow \downarrow d\vec{E}_x$ от симметрично расположенных зарядов dQ' левой части нити. В результате результирующий вектор $(\vec{E} = \vec{E}_y) \uparrow$, т. е. вектор напряженности поля в точке A направлен вдоль оси y перпендикулярно нити. Модуль вектора напряженности найдем, подставляя в уравнение (6) значение $\sin \beta$:

$$E = \frac{2k\tau}{r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2r_0}{l}\right)^2}} = \frac{2kQ}{l r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2r_0}{l}\right)^2}}. \quad (7)$$

Проверим полученную расчетную формулу (7) на следующие предельные случаи:

а) При $r_0 \gg l$ (расстояние до точки A велико по сравнению с размером нити, поэтому заряд нити можно считать точечным)

в формуле (7) $\sqrt{1 + \left(\frac{2r_0}{l}\right)^2} \approx \frac{2r_0}{l}$. Тогда $E = \frac{2kQ}{l r_0 \frac{2r_0}{l}} = \frac{kQ}{r_0^2}$; получена

формула напряженности поля, создаваемого точечным зарядом Q , следовательно, формула (7) верна.

б) При $r_0 \ll l$ (точка A вблизи нити, которую в этом случае можно считать достаточно длинной) в формуле (7) $\sqrt{1 + \left(\frac{2r_0}{l}\right)^2} \approx 1$. Тогда

$E = \frac{2k\tau}{r_0} = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_0}$. Эта формула совпадает с формулой для напряженности поля длинной нити, выведенной с помощью

теоремы Гаусса (см. раздел «Теоретическая часть», формула (12)). Следовательно, полученная расчетная формула (7) справедлива и в этом приближении.

Вычисляем напряженность ЭСП в точке A по формуле (7):

$$E = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\Phi} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}}{1,5 \text{ м} \cdot 0,5 \text{ м} \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 0,5 \text{ м}}{1,5 \text{ м}}\right)^2}} = 2,0 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 20 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

2) Определим потенциал φ электростатического поля в точке A , используя принцип суперпозиции: суммируя бесконечно малые величины потенциала $d\varphi$ полей, которые создаются элементарными зарядами dQ :

$$\varphi = \int_0^\beta d\varphi = \int_Q \frac{kdQ}{\varepsilon r} = \int_{-\beta}^\beta \frac{k\tau r d\alpha}{\varepsilon r \cos \alpha} = \frac{2kQ}{\varepsilon l} \int_0^\beta \frac{d\alpha}{\cos \alpha}. \quad (8)$$

По таблице интегралов находим

$$\int \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Рассчитываем величину потенциала φ по формуле (8):

$$\varphi = \frac{2kQ}{\varepsilon l} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right| \right) = \frac{2kQ}{\varepsilon l} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - 0 \right). \quad (9)$$

Определим угол β , для которого $\operatorname{tg} \beta = \frac{l}{2r_0}$ (см. рис. 17): $\operatorname{tg} \beta = \frac{1,5 \text{ м}}{2 \cdot 0,5 \text{ м}} = 1,5$;

$\rightarrow \beta = 56,3^\circ$; тогда $\operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} 73,1^\circ = 3,3$.

Вычисляем потенциал ЭСП в исследуемой точке A по формуле (9):

$$\varphi = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\Phi} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}}{1 \cdot 1,5 \text{ м}} \ln 3,3 = 1,43 \cdot 10^4 \text{ В} = 14,3 \text{ кВ}.$$

Задача 9. Электростатическое поле создается нитью длиной $l = 1 \text{ м}$, имеющей форму полукольца и несущей заряд $Q = 10 \text{ нКл}$, равномерно распределенный по длине нити. Определите напряженность \vec{E} электростатического поля и потенциал φ в точке O в центре полукольца.

Дано

Решение

$$l = 1 \text{ м};$$

$$Q = 10^{-8} \text{ Кл};$$

$$1) \vec{E} - ?$$

$$2) \varphi - ?$$

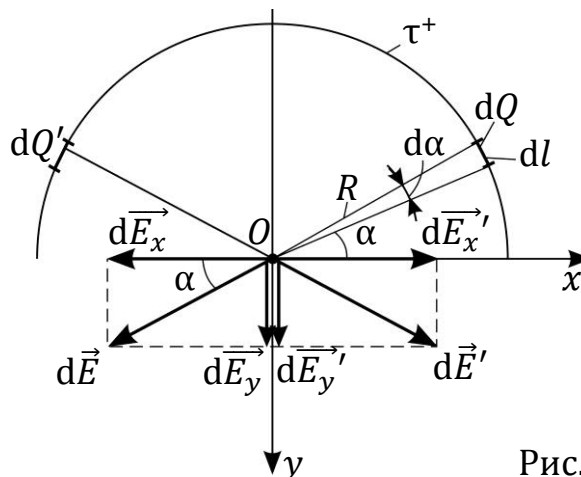


Рис. 18

1) Заряд, распределенный по полукольцу, находится от точки O на расстоянии $r = R$ – радиусу полукольца, и не является точечным, так как размер заряженной нити $l > r$. Поэтому мысленно разобьем весь заряд тела на элементарные заряды dQ и просуммируем создаваемые ими поля напряженностью $d\vec{E}$. Заряженное полукольцо имеет ось симметрии – ось y , поэтому целесообразно рассмотреть векторы напряженности полей $d\vec{E}$ и $d\vec{E}'$, создаваемые симметрично расположенными элементарными зарядами dQ и dQ' соответственно (рис. 18).

Чтобы определить направление векторов $d\vec{E}$, достаточно в точку O мысленно поместить пробный положительный заряд $Q_{\text{пр}}^+$ и показать вектор силы $d\vec{F}$, которой элементарный положительный заряд dQ отталкивает пробный заряд (вектор $d\vec{F}$ направлен вдоль линии, соединяющей взаимодействующие заряды). Вектор напряженности $d\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{F}$, т. е. совпадает по направлению с силой $d\vec{F}$. Все элементарные заряды полукольца создают «веер» векторов $d\vec{E}$, расположенный в плоскости XY .

Запишем принцип суперпозиции для напряженности \vec{E} ЭСП в точке O :

$$\vec{E} = \int_Q d\vec{E}. \quad (1)$$

Каждый бесконечно малый вектор $d\vec{E}$ разложим по координатным осям x и y : $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$, – при этом уравнение (1) перепишем в виде:

$$\vec{E} = \int_Q d\vec{E}_x + \int_Q d\vec{E}_y. \quad (2)$$

Для симметрично расположенных зарядов dQ и dQ' по рис. 18 видно, что вектор $d\vec{E}_x' \uparrow\downarrow d\vec{E}_x$, а модули их одинаковы, следовательно, их сумма равна нулю. Таким образом, все векторы $d\vec{E}_x$, создаваемые элементарными зарядами правой части полукольца, будут скомпенсированы векторами $d\vec{E}_x'$ от зарядов левой части полукольца. В результате первый интеграл в уравнении (2) обращается в нуль; подтвердим это расчетом.

Модули векторов $d\vec{E}_x$ и $d\vec{E}_y$, необходимые для расчета \vec{E} , определим из треугольников (см. рис. 18):

$$dE_x = dE \cdot \cos \alpha; \quad dE_y = dE \cdot \sin \alpha, \quad \text{где } dE = \frac{kdQ}{R^2}. \quad (3)$$

С учетом формул (3) принцип суперпозиции (2) преобразуется к виду:

$$\vec{E} = \int_Q \frac{kdQ}{R^2} \cos \alpha + \int_Q \frac{kdQ}{R^2} \sin \alpha. \quad (4)$$

В подинтегральном выражении равенства (4) содержатся две переменные: угол α и дифференциал заряда dQ . В таком случае переходят к одной переменной, обычно к углу α , записывая элементарный заряд

$$dQ = \tau dl, \quad (5)$$

где $\tau = \frac{Q}{l}$ – линейная плотность заряда нити; $dl = R d\alpha$, – элемент длины полукольца, радиус которого $R = \frac{l}{\pi}$.

Подставим величину dQ , определяемую формулой (5), в подинтегральные выражения уравнения (4), вынесем постоянные величины k , Q , R и l за знак интегралов, и вычислим интегралы:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{kQR}{lR^2} \left(\int_0^\pi \cos \alpha \, d\alpha + \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha \right) = \frac{\pi kQ}{l^2} (\sin \alpha \Big|_0^\pi - \cos \alpha \Big|_0^\pi) = \\ &= \frac{\pi kQ}{l^2} (0 - (\cos \pi - \cos 0)) = \frac{2\pi kQ}{l^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно полученному выражению (6), составляющая вектора напряженности по оси x : $\vec{E}_x = \vec{0}$, – что и показывала взаимная компенсация векторов $d\vec{E}_x'$ и $d\vec{E}_x$. В результате вектор напряженности поля в точке O сонаправлен орту оси y : $\vec{E} \uparrow \vec{y}$, – т. е. вектор \vec{E} направлен вдоль оси y (см. рис. 18). Модуль вектора напряженности

$$E = \frac{2\pi kQ}{l^2}. \quad (7)$$

Вычисляем: $E = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{1^2 \text{ м}^2} = 558 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 0,56 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

2) Определяем потенциал точки O электростатического поля, созданного заряженным полукольцом, суммируя бесконечно малые величины $d\varphi$ полей элементарных зарядов dQ :

$$\varphi = \int_0^Q \frac{kdQ}{R} = \frac{kQ}{R} = \frac{\pi kQ}{l}. \quad (8)$$

Вычисляем потенциал ЭСП в исследуемой точке O :

$$\varphi = \frac{3,14 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{1 \text{ м}} = 282 \text{ В}.$$

Задача 10. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см, несет равномерно распределенный по длине заряд $Q = 0,5$ мкКл. Определите напряженность \vec{E} электростатического поля и его потенциал φ в точке A , равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 20$ см.

Дано

$$\begin{aligned} R &= 0,10 \text{ м}; \\ Q &= 0,5 \text{ мкКл} = \\ &= 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}; \\ r &= 0,20 \text{ м}. \end{aligned}$$

1) \vec{E} – ? 2) φ – ?

Решение

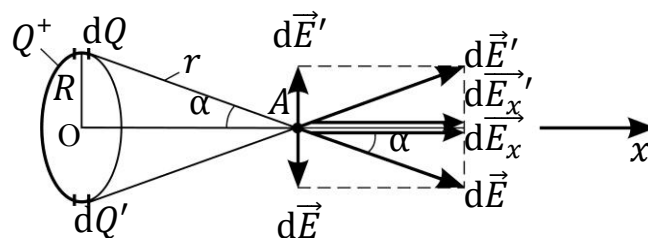


Рис. 19

1) Размеры заряженного кольца соизмеримы с расстоянием от кольца до точки A , поэтому заряд кольца не является точечным. Следовательно, как и в предыдущих задачах, мысленно разобьем весь заряд кольца на элементарные заряды dQ и сложим создаваемые ими поля напряженностью $d\vec{E}$, используя принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \int_Q d\vec{E}. \quad (1)$$

Для определения направления векторов $d\vec{E}$, как обычно, в исследуемую точку поля A мысленно помещаем пробный заряд $Q_{\text{пр}}^+$ и показываем силу $d\vec{F}$, действующую на него со стороны заряда dQ . Сила $d\vec{F}$ направлена вдоль линии, соединяющей заряд dQ с пробным, а вектор напряженности $d\vec{E} \uparrow d\vec{F}$ (рис. 19). Так как заряженное кольцо имеет ось симметрии: ось x , – то покажем на рисунке и вектор $d\vec{E}'$ от заряда dQ' , расположенного симметрично заряду dQ . Векторы $d\vec{E}$ от всех элементарных зарядов кольца образуют «конус векторов». Для их сложения разложим каждый вектор $d\vec{E}$ на две составляющие:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}', \quad (2)$$

где $d\vec{E}_x$ – составляющая вектора $d\vec{E}$, направленная по оси x ; $d\vec{E}'$ – составляющая, перпендикулярная вектору $d\vec{E}_x$. При подстановке величины $d\vec{E}$, согласно равенству (2), в уравнение (1) результирующий вектор \vec{E} представится суммой двух интегралов:

$$\vec{E} = \int_Q d\vec{E}_x + \int_Q d\vec{E}'. \quad (3)$$

По рис. 19 видно, что вектор $d\vec{E} = -d\vec{E}'$; вследствие этого в уравнении (3) второй интеграл: $\int_Q d\vec{E}' = 0$, – так как векторы $d\vec{E}'$ от диаметрально противоположащих элементов заряда dQ взаимно компенсируются. В результате, поскольку направления всех составляющих $d\vec{E}_x$ одинаково: вдоль положительного направления оси x , – то модуль результирующего вектора напряженности в точке A равен сумме модулей dE_x :

$$E = \int_Q dE_x = \int_Q dE \cos \alpha = \int_0^Q \frac{k dQ \cos \alpha}{r^2} = \frac{k \cos \alpha}{r^2} \int_0^Q dQ = \frac{kQ \cos \alpha}{r^2}. \quad (4)$$

Здесь $\cos \alpha = \frac{OA}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r} = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2}$.

Вычисляем напряженность ЭСП кольца в точке A по формуле (4):

$$E = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,1 \text{ м}}{0,2 \text{ м}}\right)^2}}{0,2^2 \text{ м}^2} = 0,97 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 97 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

2) Потенциал точки A электростатического поля, созданного заряженным кольцом, определяем, суммируя бесконечно малые величины потенциала $d\varphi$ полей элементарных зарядов dQ :

$$\varphi = \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^Q \frac{k dQ}{r} = \frac{kQ}{r}. \quad (5)$$

Вычисляем потенциал ЭСП в точке A по формуле (5):

$$\varphi = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}}{0,2 \text{ м}} = 2,25 \cdot 10^4 \text{ В} = 22,5 \text{ кВ}.$$

Задача 11. Электростатическое поле создано двумя бесконечно длинными нитями, скрещенными под прямым углом (рис. 20 а). Нити заряжены равномерно по длине с линейными плотностями $\tau_1 = 2 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$ и $\tau_2 = -1 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Для точки A , расположенной на расстояниях $a = 10$ см и $b = 20$ см от нитей (см. рис. 20 а), определите напряженность \vec{E} электростатического поля, созданного нитями, и силу \vec{F} , действующую на заряд $Q_0 = 10$ нКл, помещенный в точку A .

Дано

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 2 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}; \\ \tau_2 &= -1 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}; \\ a &= 0,10 \text{ м}; \\ b &= 0,20 \text{ м}; \\ Q_0 &= 10 \text{ нКл}. \end{aligned}$$

1) $\vec{E} - ?$ 2) $\vec{F} - ?$

Решение

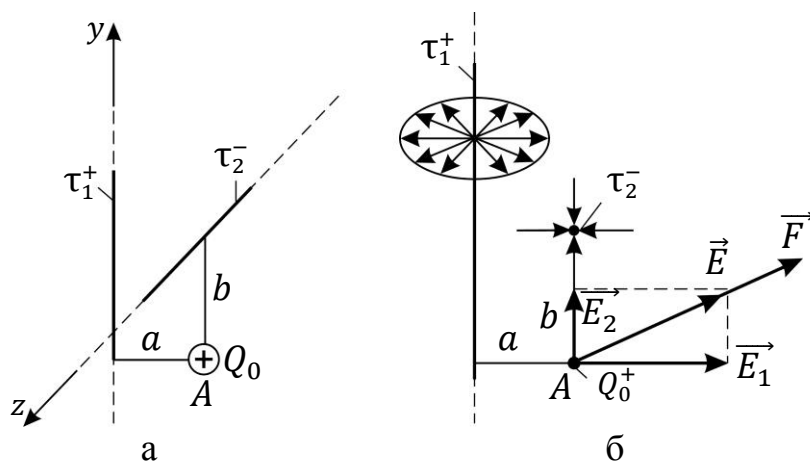


Рис. 20

1) Электрическое поле, созданное равномерно заряженной нитью, обладает осевой симметрией: силовые линии поля идут вдоль радиальных направлений (рис. 20 б). Напряженность такого ЭСП рассчитывается с помощью теоремы Гаусса и в точках, находящихся на расстоянии r от нити, определяется формулой

$$E = \frac{2k\tau}{r}, \quad (1)$$

где $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}}$ – коэффициент пропорциональности; τ – линейная плотность заряда нити.

Напряженность \vec{E} результирующего поля двух нитей в точке A находим по принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (2)$$

где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 – напряженности полей, создаваемых первой и второй нитью. Направление этих векторов (см. рис. 20 б) можно определить двумя способами: 1) провести от каждой нити одну из радиальных силовых линий ЭСП данной нити, проходящую через точку A , либо 2) как обычно, поместить в точку A пробный положительный заряд $Q_{\text{пр}}^+$ и показать вектор силы \vec{F} , действующей на этот заряд со стороны каждой нити; при этом вектор напряженности $\vec{E} \uparrow \vec{F}$. По рис. 20 б видно, что векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 взаимно перпендикулярны, поэтому модуль результирующего вектора напряженности E находим по теореме Пифагора:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}. \quad (3)$$

Подставляя в формулу (3) величины напряженности электрического поля каждой нити по формуле (1), получаем расчетную формулу напряженности E данного электростатического поля в точке A :

$$E = 2k \sqrt{\left(\frac{\tau_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{b}\right)^2}. \quad (4)$$

Вычисляем величину напряженности поля

$$E = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \sqrt{\left(\left(\frac{2}{0,1}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,2}\right)^2\right) 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^4}} = 3,7 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 370 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

2) Формулу для расчета силы, действующей на точечный заряд Q_0 , находящийся в точке A данного ЭСП, получим из определительной формулы напряженности электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_{\text{пр}}^+}; \quad \rightarrow \quad \vec{F} = Q_{\text{пр}}^+ \vec{E}; \quad \rightarrow \quad \vec{F} = Q_0 \vec{E}. \quad (5)$$

Так как заряд Q_0 положительный, то направление силы \vec{F} , согласно формуле (5), совпадает с направлением вектора напряженности поля в точке A (см. рис. 20 б). Вычисляем модуль силы:

$$F = 10 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot 3,7 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 3,7 \text{ мН}.$$

3.3. Расчет напряженности электростатического поля с помощью теоремы Гаусса

План решения задач

1) Выясните тип симметрии электростатического поля, который отображает симметрию заряженного тела, создающего поле:

а) сферическая (центральная) симметрия характерна для полей равномерно заряженной сферы (нескольких концентрических сфер), равномерно заряженного по объему шара, металлического шара и т. п.

б) цилиндрическая (осевая) симметрия имеется у полей, созданных равномерно заряженной по длине нитью или цилиндром (несколькими

коаксиальными цилиндрами), равномерно заряженным по объему цилиндром и т. п.

в) плоская (зеркальная) симметрия имеется у полей, созданных равномерно заряженной плоскостью, равномерно заряженной по объему пластиной и т. п.

2) Изобразите на рисунке силовые линии поля, ход которых определяется симметрией заряженных тел.

3) Выберите замкнутую вспомогательную поверхность, проходящую через выбранную точку поля (в которой требуется определить напряженность) и удобную для расчета потока вектора напряженности $\Phi_E = \oint E_n dS$. Для удобной поверхности проекция вектора напряженности на нормаль \vec{n} к поверхности $E_n = E$, т. е. вектор $\vec{E} \parallel \vec{n}$ в той точке, где определяем величину E . Другие участки вспомогательной поверхности выбирают такими, чтобы $E_n = 0$. Заметим, что для определения проекции E_n принято проводить внешнюю нормаль к поверхности. Таким образом, для правильно выбранной вспомогательной поверхности поток Φ_E в левой части теоремы Гаусса записывается в следующем виде:

$$\oint_S E_n dS = E(r)S, \quad (1)$$

где $E(r)$ – напряженность поля на расстоянии r , отсчитанном от центра (оси) симметрии заряда до точки, в которой определяем величину E .

4) Расчет напряженности поля с помощью теоремы Гаусса:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_i^{\text{внутри } S}, \quad (2)$$

выполняйте по областям; их выбирайте так, чтобы в пределах каждой области правая часть уравнения (2) была неизменной. На границе двух соседних областей изменяется величина $\sum Q_i^{\text{внутри } S}$ – сумма зарядов, находящихся внутри выбранной вспомогательной поверхности, при этом функция $E(r)$ изменяется скачком.

Задача 12. На двух концентрических сферах радиусами R и $2R$ равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_2 = -\sigma$, где $\sigma = 0,1 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$. 1) Используя теорему Гаусса, найдите зависимость проекции вектора напряженности электростатического поля от расстояния $E_r(r)$ для трех областей: I, II и III (рис. 21). 2) Покажите направление вектора \vec{E} и вычислите модуль E в точке на расстоянии $r = 3R$ от центра сфер. 3) Постройте график зависимости $E_r = f(r)$.

Решение

1) По условию задачи заряды, равномерно распределенные по сферам, находятся на одинаковых расстояниях от центра сфер: $r = R$ и $r = 2R$. Следовательно, центр сфер является центром симметрии системы зарядов, а ЭСП, созданное сферами, обладает центральной (сферической) симметрией. На рис. 22 показано расположение зарядов и силовые линии

поля: 1) линии \vec{E} начинаются а) на положительных зарядах первой сферы, б) либо на бесконечно большом расстоянии от сфер, и 2) силовые линии

Дано

$$(r = R): \sigma_1 = \sigma;$$

$$(r = 2R): \sigma_2 = -\sigma;$$

$$\sigma = 0,1 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$$

1) в областях I, II, III:

$$E_r(r) - ?$$

2) $E(3R) - ?$

3) график $E_r = f(r)$.

Решение

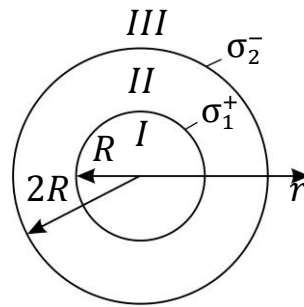


Рис. 21

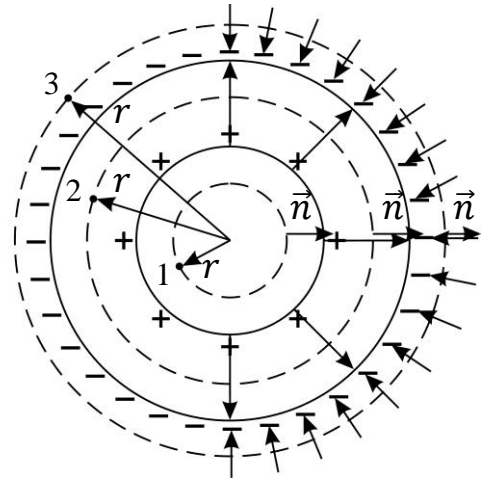


Рис. 22

идут к отрицательным зарядам второй сферы по радиальным линиям, так как такое поле является сферически симметричным. Заметим, что поле заряженной сферы на большом расстоянии от нее: $r \gg R$, – совпадает с полем точечного заряда, также имеющим центральную симметрию.

Вспомогательные поверхности для расчета потока Φ_E в теореме Гаусса выбираем также в виде сфер радиусом r , так как на них одинакова величина проекции напряженности $E_n(r)$. Единичные нормали \vec{n} к этим поверхностям идут по радиальным направлениям, поэтому проекции E_n и E_r совпадают. Соответственно, поток вектора \vec{E} через сферическую поверхность радиусом r и площадью $S = 4\pi r^2$ определяется формулой:

$$\Phi_E = E_n S = E_r \cdot 4\pi r^2. \quad (1)$$

Расчет функции $E_r(r)$ выполняем по следующим областям:

Область I: ($0 < r < R$). В этой области выбираем произвольную точку 1 и проводим через нее сферу радиусом r (см. рис. 22). Внутри данной вспомогательной сферы нет зарядов: $Q_{\text{внутри } S} = 0$. Следовательно, по теореме Гаусса определяем

$$E_{1r} \cdot 4\pi r^2 = 0; \rightarrow E_{1r}(r) = 0. \quad (2)$$

Область II: ($R < r < 2R$). В этой области проводим сферу радиусом r через произвольную точку 2. Внутри данной вспомогательной сферы находится заряд $Q_1 = \sigma_1 \cdot 4\pi R^2$ – на поверхности первой заряженной сферы радиусом R . Приравниваем поток, определяемый формулой (1), по теореме Гаусса:

$$E_{2r} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1 \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0}, \quad \text{где } \sigma_1 = \sigma.$$

Отсюда выражаем зависимость $E_{2r}(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$, т. е. $E_{2r}(r) \sim \frac{1}{r^2}$. (3)

Область III: ($r > 2R$). В этой области вспомогательная сфера радиусом r проходит через точку 3. Внутри данной сферы находятся заряды обеих сфер, следовательно

$$\sum Q_i^{\text{внутри } S} = Q_1 + Q_2 = \sigma_1 \cdot 4\pi R^2 + \sigma_2 \cdot 4\pi(2R)^2 = 4\pi R^2(\sigma - 4\sigma) = -3\sigma \cdot 4\pi R^2.$$

Приравниваем поток, определяемый формулой (1), по теореме Гаусса:

$$E_{3r} \cdot 4\pi r^2 = \frac{-3\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0}; \rightarrow E_{3r}(r) = -\frac{3\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}. \quad (4)$$

Таким образом, проекция вектора напряженности $E_{3r} < 0$, а модуль величины $E_{3r} \sim \frac{1}{r^2}$, т. е. уменьшается с увеличением расстояния r .

2) Заданная точка для определения напряженности поля находится на расстоянии $r = 3R$ от центра сфер, следовательно, она лежит в области III, поэтому проекцию напряженности рассчитываем по формуле (4):

$$E_{3r}(3R) = -\frac{3\sigma R^2}{\varepsilon_0(3R)^2} = -\frac{\sigma}{3\varepsilon_0}. \quad (5)$$

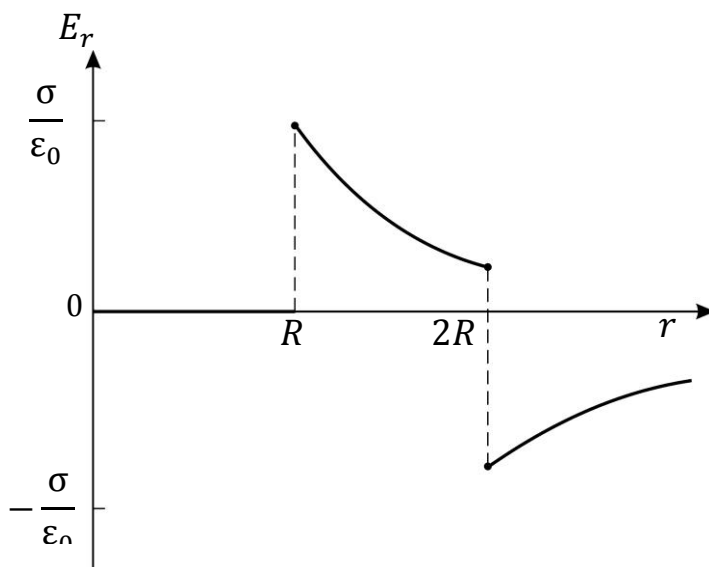
Здесь ε_0 – электрическая постоянная.

Вычисляем напряженность ЭСП сфер в заданной точке по формуле (5):

$$E_r(3R) = -\frac{0,1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}}{3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}} = -3,8 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}} = -3,8 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Проекция напряженности E_r отрицательная, следовательно, вектор \vec{E} в этой точке противоположен радиальному направлению, т. е. направлен к центру сфер, что соответствует показанному на рис. 22.

3) Для построения графика зависимости $E_r = f(r)$ найдем значения проекции вектора напряженности на границах участков:



$$E_{2r}(R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

$$E_{2r}(2R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0(2R)^2} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0};$$

$$E_{3r}(2R) = -\frac{3\sigma R^2}{\varepsilon_0(2R)^2} = -\frac{3\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Используя эти граничные значения, построим график зависимости проекции E_r вектора напряженности от расстояния r от центра сфер: $E_r = f(r)$ (рис. 23).

Рис. 23

Задача 13. На двух коаксиальных бесконечно длинных цилиндрах радиусами R и $2R$ равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = -\sigma$ и $\sigma_2 = 3\sigma$, где $\sigma = 1,0 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$. 1) Используя теорему Гаусса, найдите зависимость проекции вектора напряженности ЭСП от расстояния $E_r(r)$ для трех областей: I, II и III (рис. 24). 2) Покажите направление вектора \vec{E} и вычислите модуль E в точке на расстоянии $r = 4R$ от оси цилиндров. 3) Постройте график зависимости $E_r = f(r)$.

Дано

$$(r = R): \sigma_1 = -\sigma;$$

$$(r = 2R): \sigma_2 = 3\sigma;$$

$$\sigma = 1,0 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$$

1) в областях I, II, III :

$$E_r(r) - ?$$

2) $E(4R) - ?$

3) график $E_r = f(r)$.

Решение

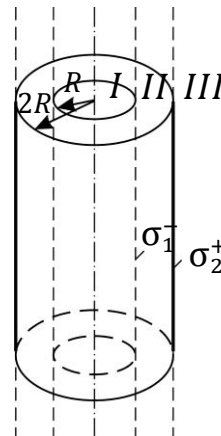


Рис. 24

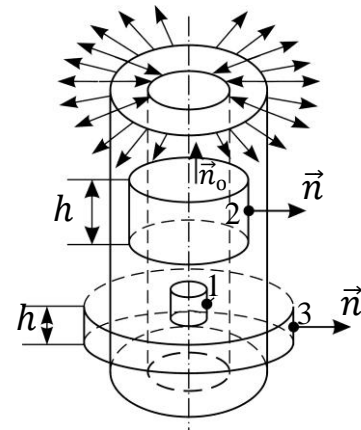


Рис. 25

1) По условию задачи заряды, равномерно распределенные по поверхности цилиндров, находятся на одинаковых расстояниях от оси цилиндров: $r = R$ и $r = 2R$. Следовательно, ось цилиндров является осью симметрии данной системы зарядов, а ЭСП, созданное цилиндрами, обладает осевой симметрией. На рис. 25 показаны силовые линии поля. Линии вектора \vec{E} начинаются на положительных зарядах второго цилиндра и идут к отрицательным зарядам первого цилиндра либо в бесконечность *по радиальным линиям*, так как такое поле является осесимметричным.

Вспомогательные поверхности для расчета потока Φ_E в теореме Гаусса выбираем также в виде цилиндров радиусом r , так как на их боковой поверхности одинакова величина проекции E_n . Единичные нормали \vec{n} к этим поверхностям идут по радиальным направлениям, поэтому проекции E_n и E_r совпадают. Чтобы боковая поверхность была замкнутой «закроем» основания (торцы) цилиндров дисками, плоскость которых ортогональна боковой поверхности цилиндра. В этом случае векторы \vec{E} будут скользить вдоль плоскости оснований и проекция напряженности на нормаль к основаниям $E_{n_0} = 0$, следовательно, и поток $\Phi_E(S_{\text{осн}}) = 0$. Поток вектора \vec{E} через такой замкнутый цилиндр радиусом r и высотой h определяется следующей формулой:

$$\Phi_E = \Phi_E^{\text{бок}} + 2\Phi_E^{\text{осн}} = E_n S_{\text{бок}} = E_r \cdot 2\pi r h. \quad (1)$$

Расчет функции $E_r(r)$ выполняем по следующим областям:

Область I: ($0 < r < R$). В этой области выбираем произвольную точку 1 и проводим вспомогательный цилиндр радиусом r такой, чтобы точка 1 лежала на боковой поверхности цилиндра (см. рис. 25). Внутри этого цилиндра нет зарядов: $Q_{\text{внутри } S} = 0$. Следовательно, по теореме Гаусса получаем

$$E_{1r} \cdot 2\pi r h = 0; \rightarrow E_{1r}(r) = 0. \quad (2)$$

Область II: ($R < r < 2R$). В этой области проводим вспомогательный цилиндр радиусом r , равным расстоянию от оси цилиндра до произвольной точки 2, чтобы эта точка оказалась на боковой поверхности цилиндра. Внутри данного вспомогательного цилиндра на поверхности первого цилиндра радиусом R находится заряд $Q_1 = \sigma_1 \times 2\pi R h$. Приравняем поток, определяемый формулой (1), по теореме Гаусса:

$$E_{2r} \cdot 2\pi r h = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1 \cdot 2\pi R h}{\epsilon_0}, \text{ где } \sigma_1 = -\sigma.$$

При этом произвольно выбранный параметр h сокращается, и получаем зависимость в виде:

$$E_{2r}(r) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}. \quad (3)$$

Таким образом, проекция вектора \vec{E}_2 : $E_{2r} < 0$, а модуль $E_2 \sim \frac{1}{r}$, т. е. уменьшается с увеличением расстояния r .

Область III: ($r > 2R$). В этой области боковую поверхность вспомогательного цилиндра проводим через точку 3. Внутри данного цилиндра находятся заряды обоих цилиндров, следовательно,

$$\sum Q_i^{\text{внутри } S} = Q_1 + Q_2 = \sigma_1 \cdot 2\pi R h + \sigma_2 \cdot 2\pi(2R)h = 2\pi R h(-\sigma + 6\sigma) = 5\sigma \cdot 2\pi R h.$$

Приравняем поток, определяемый формулой (1), по теореме Гаусса:

$$E_{3r} \cdot 2\pi r h = \frac{5\sigma \cdot 2\pi R h}{\epsilon_0}; \rightarrow E_{3r}(r) = \frac{5\sigma R}{\epsilon_0 r}, \text{ т. е. } E_{3r} \sim \frac{1}{r}. \quad (4)$$

2) Заданная в условии задачи точка для определения напряженности поля находится на расстоянии $r = 4R$ от оси цилиндров, следовательно, она лежит в области III, поэтому проекцию напряженности рассчитываем по формуле (4):

$$E_{3r}(4R) = \frac{5\sigma R}{\epsilon_0 4R} = \frac{5\sigma}{4\epsilon_0}. \quad (5)$$

Здесь ϵ_0 – электрическая постоянная.

Вычисляем значение проекции напряженности ЭСП цилиндров в заданной точке по формуле (5):

$$E_r(4R) = \frac{5 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}}{4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}} = 1,41 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 141 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Проекция напряженности E_r положительная, следовательно, вектор \vec{E} в этой точке направлен по радиальному направлению от оси цилиндра, что соответствует показанному на рис. 25.

3) Для построения графика зависимости $E_r = f(r)$ найдем значения проекции вектора напряженности на границах участков:

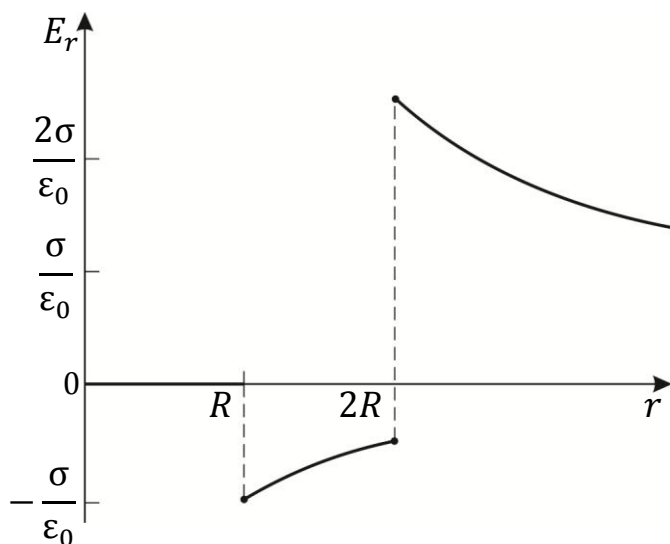


Рис. 26

$$E_{2r}(R) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0 R} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0};$$

$$E_{2r}(2R) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0 2R} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0};$$

$$E_{3r}(2R) = \frac{5\sigma R}{\epsilon_0 2R} = \frac{5\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Используя эти граничные значения, построим график зависимости проекции E_r вектора напряженности от расстояния r , отсчитанного от оси цилиндра: $E_r = f(r)$ (рис. 26).

Задача 14. На двух бесконечных параллельных плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = -4\sigma$ и $\sigma_2 = 2\sigma$, где $\sigma = 0,5 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$. 1) Используя теорему Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найдите зависимость проекции вектора напряженности электростатического поля от координаты $E_x(x)$ для трех областей: I, II и III (рис. 27). 2) Покажите направление вектора \vec{E} и вычислите модуль E в точке, расположенной справа от плоскостей. 3) Постройте график зависимости $E_x = f(x)$.

Дано

$$\sigma_1 = -4\sigma;$$

$$\sigma_2 = 2\sigma;$$

$$\sigma = 0,5 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$$

1) в областях I, II, III:

$$E_x(x) = ?$$

2) в области III: $E = ?$

3) график $E_x = f(x)$.

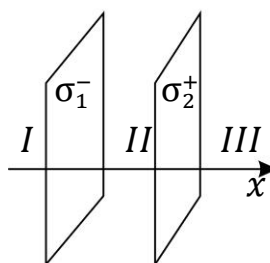


Рис. 27

Решение

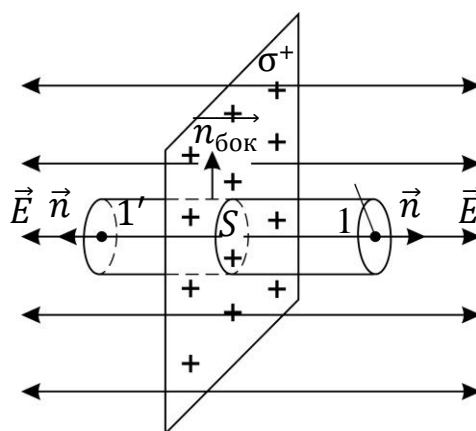


Рис. 28

ЭСП, созданное двумя заряженными плоскостями, не обладает симметрией, в отличие от поля одной заряженной плоскости, которое имеет зеркальную симметрию. Поэтому с помощью теоремы Гаусса найдем напряженность поля, создаваемого одной заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ^+ . Силовые линии этого поля перпендикулярны плоскости и направлены от плоскости в обе стороны (рис. 28) – такое поле симметрично относительно «плоскости-зеркала».

1) Для расчета напряженности E выберем точки 1 и 1' справа и слева от плоскости *на одинаковом расстоянии* от нее; в силу симметрии поля в этих точках одинаков модуль векторов: $E_1 = E_{1'} = E$. В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости. При этом нормали к основаниям $\vec{n} \uparrow \vec{E}$ (см. рис. 28), следовательно, проекции $E_n = E$ и слева, и справа от плоскости. Поток вектора \vec{E} через боковую поверхность цилиндра равен нулю: $\Phi_E^{\text{бок}} = 0$, так как $\vec{E} \perp \vec{n}_{\text{бок}}$ и поэтому $E_{n_{\text{бок}}} = 0$, поскольку линии напряженности не пересекают боковую поверхность. Заметим, что в качестве вспомогательной поверхности можно выбрать и прямую призму или параллелепипед, основания которых проходили бы через точки 1 и 1'.

Вычислим поток вектора \vec{E} через такой замкнутый цилиндр:

$$\Phi_E = 2 \Phi_E^{\text{осн}} + \Phi_E^{\text{бок}} = 2ES + 0. \quad (1)$$

Заряд, находящийся внутри этой замкнутой поверхности, размещен на диске площадью S (см. рис. 28) и равен $Q^{\text{внутри } S} = \sigma S$. Приравняем поток, определяемый формулой (1), по теореме Гаусса:

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}.$$

Из этого уравнения получаем зависимость

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что напряженность E электростатического поля заряженной плоскости не зависит от расположения точки поля относительно плоскости и одинакова во всех точках поля – такое поле называется *однородным*. Это справедливо, пока плоскость можно считать бесконечно большой, т. е. на расстояниях от заряженной плоскости, достаточно малых по сравнению с ее размерами.

Для электростатического поля двух плоскостей, заданного в условии задачи, найдем напряженность, используя принцип суперпозиции полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (3)$$

где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 – векторы напряженности полей первой и второй плоскости, причем модули этих векторов определяются формулой (2):

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}.$$

Но сложение векторов в уравнении (3) необходимо выполнять с учетом их направлений, которые определяем, как обычно, помещая в выбранную точку поля пробный положительный заряд $Q_{пр}^+$. Отрицательные заряды первой плоскости будут притягивать к себе пробный заряд силой \vec{F}_1 , а положительные заряды второй плоскости будут отталкивать от себя заряд $Q_{пр}^+$ силой \vec{F}_2 . По направлениям этих сил направлены линии напряженности ЭСП: $\vec{E}_1 \uparrow\uparrow \vec{F}_1$ и $\vec{E}_2 \uparrow\uparrow \vec{F}_2$. В каждой области пространства покажем по одной линии напряженности поля заряженных пластин: линию \vec{E}_1 и линию \vec{E}_2 (рис. 29).

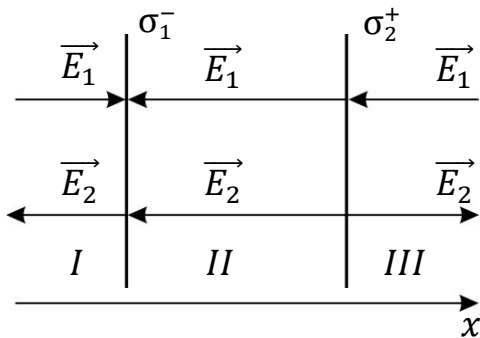


Рис. 29

Запишем проекцию E_x вектора напряженности поля плоскостей, проецируя уравнение (3) принципа суперпозиции на ось x :

$$E_x = E_{1x} + E_{2x}. \quad (4)$$

Найдем проекцию E_x в каждой области:

Область I (слева от плоскостей):

$$E_{Ix} = E_1 - E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon_0} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (5)$$

Область II (между плоскостями):

$$E_{IIx} = -E_1 - E_2 = -\frac{1}{2\varepsilon_0} (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (6)$$

Область III (справа от плоскостей):

$$E_{IIIx} = -E_1 + E_2 = \frac{1}{2\varepsilon_0} (-\sigma_1 + \sigma_2). \quad (7)$$

Заметим, что для определения проекции напряженности E_x в уравнения (5), (6) и (7) следует подставлять модули величин σ_i , так как их знак учтен знаком проекций E_x , которые соответствуют указанным направлениям векторов \vec{E} для каждой плоскости.

2) Рассчитаем проекцию вектора напряженности ЭСП в области III – справа от плоскостей, по уравнению (7):

$$E_{IIIx} = \frac{1}{2\varepsilon_0} (-4\sigma + 2\sigma) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (8)$$

Проекция E_{IIIx} отрицательна, следовательно, вектор \vec{E}_{III} направлен противоположно положительному направлению оси x .

Вычисляем модуль вектора \vec{E}_{III} :

$$E_{III} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}}{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}} = 5,65 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 56,5 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

3) Чтобы построить график зависимости проекции вектора напряженности E_x от координаты x , найдем значения проекций в каждой области пространства по уравнениям (5), (6) и (7):

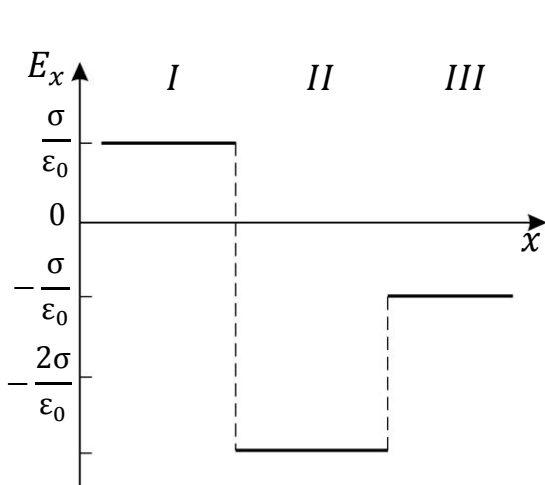


Рис. 30

$$E_{Ix} = \frac{4\sigma - 2\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \rightarrow E_{Ix} > 0;$$

$$E_{IIx} = -\frac{(4\sigma + 2\sigma)}{2\epsilon_0} = -\frac{3\sigma}{\epsilon_0}; \rightarrow E_{IIx} < 0;$$

$$E_{IIIx} = \frac{(-4\sigma + 2\sigma)}{2\epsilon_0} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}; \rightarrow E_{IIIx} < 0.$$

Используя полученные значения, одинаковые в пределах каждой области, построим график зависимости проекции E_x вектора напряженности от координаты x : $E_x = f(x)$ (рис. 30).

3.4. Движение заряженных частиц в электростатическом поле

План решения задач

1) Решение задачи следует начать с рисунка, на котором необходимо показать следующее: а) направление силовых линий электростатического поля; б) начальное (точка 1) и конечное (точка 2) положения движущейся заряженной частицы; в) векторы скорости частицы \vec{v} и силы \vec{F} , действующей на частицу с зарядом Q со стороны электрического поля. При этом нужно учитывать, что величина силы

$$\vec{F} = Q\vec{E}.$$

Из данной формулы следует, что для положительно заряженной частицы (протон, ион K^+ и др.) $\vec{F} \uparrow \vec{E}$, а для отрицательно заряженного электрона $\vec{F} \downarrow \vec{E}$. Если направление силы $\vec{F} \uparrow \vec{v}$, то движение частицы замедленное, и кинетическая энергия будет уменьшаться при таком движении. Если же сила $\vec{F} \uparrow \vec{v}$, то частица будет двигаться ускоренно, при этом ее скорость и кинетическая энергия будут возрастать по мере движения.

2) Так как силы электростатического поля являются консервативными, то для решения задач можно использовать закон сохранения энергии (ЗСЭ). Для этого необходимо выбрать два положения движущейся заряженной частицы в ЭСП и записать в каждом положении полную энергию частицы W , равную сумме кинетической W_K и потенциальной $W_{П}$ энергии. Затем следует приравнять значения полной энергии частицы в выбранных положениях частицы – в начальном положении 1 и в конечном – 2:

$$W_{K1} + W_{П1} = W_{K2} + W_{П2}.$$

3) Для величины энергии элементарных частиц нередко используют внесистемную единицу измерения 1 эВ (электрон-вольт). В соответствии с формулой

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2) = e(\varphi_1 - \varphi_2),$$

энергию величиной 1 эВ приобретает частица, имеющая заряд, равный заряду электрона e , после прохождения в ЭСП разности потенциалов $\Delta\varphi = 1$ В. Следовательно,

$$1 \text{ эВ} = 1 e \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Таким образом, $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ – весьма малая энергия по сравнению с энергией, равной 1 Дж.

Задача 15. Электрон с кинетической энергией, равной 20 эВ, движется из бесконечности вдоль силовой линии по направлению к металлической сфере радиусом $R = 10$ см, имеющей потенциал $\varphi(R) = -300$ В. Определите минимальное расстояние a , на которое приблизится электрон к поверхности сферы.

Дано

$$Q = e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$$

$$W_K = 20 \text{ эВ};$$

$$R = 10 \text{ см};$$

$$\varphi(R) = -300 \text{ В}.$$

$a = ?$

Решение

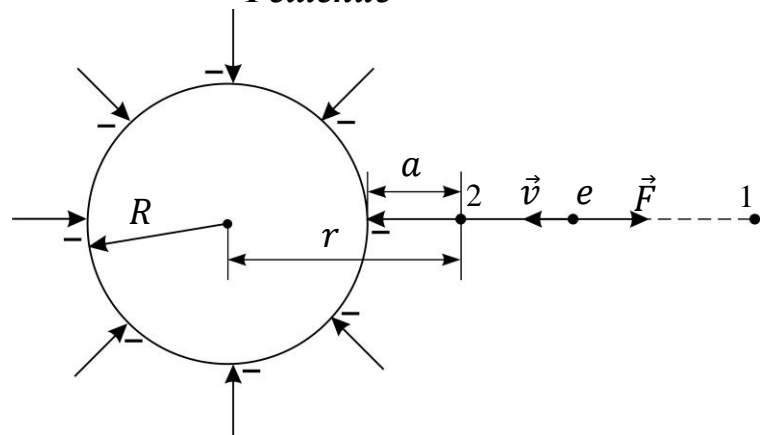


Рис. 31

Так как потенциал сферы $\varphi < 0$, то сфера имеет отрицательный заряд. При движении электрона (его заряд также отрицательный) к одноименно заряженной сфере на него действует сила отталкивания $\vec{F} \uparrow \vec{v}$ (рис. 31); следовательно, движение электрона будет замедленным. Движение электрона к сфере продолжится до тех пор, когда его скорость, уменьшаясь, станет равной нулю в точке 2 на расстоянии от поверхности сферы, равном a : $v_2 = 0$, следовательно, и кинетическая энергия электрона в этой точке $W_{K2} = \frac{mv_2^2}{2} = 0$.

Благодаря тому, что силы электростатического поля являются консервативными, выполняется закон сохранения энергии – энергия электрона остается постоянной в любой точке ЭСП:

$$W_K + W_\Pi = \text{const.} \quad (1)$$

Здесь потенциальная энергия $W_{\Pi} = e\varphi$, где e – заряд электрона; φ – потенциал поля сферы в той точке, где находится электрон.

Определим потенциал поля заряженной сферы, используя формулу связи потенциала ЭСП с его напряженностью:

$$d\varphi = -E_r dr. \quad (2)$$

Здесь проекция на радиальное направление вектора напряженности поля вне сферы $E_r = E$ (см. рис. 31). Величина напряженности поля сферы, найденная с помощью теоремы Гаусса: $E = \frac{kQ}{r^2}$, где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ – коэффициент пропорциональности в законе Кулона; Q – заряд сферы; r – расстояние *от центра сферы* до точки, в которой вычисляем значение E .

Найдем функцию $\varphi(r)$ по ее дифференциалу (см. формулу (2)); для этого вычислим неопределенный интеграл:

$$\varphi = \int d\varphi = - \int E_r dr = - \int \frac{kQ dr}{r^2} = \frac{kQ}{r} + C. \quad (3)$$

Константу интегрирования C определим, принимая за нуль потенциал на бесконечно большом расстоянии от сферы: $\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$. В соответствии с уравнением (3) запишем:

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = \frac{kQ}{\infty} + C = 0; \rightarrow C = 0.$$

Тогда потенциал поля, созданного заряженной сферой, на расстоянии r от ее центра

$$\varphi = \frac{kQ}{r}. \quad (4)$$

Соответственно, потенциальная энергия электрона в ЭСП, созданном сферой

$$W_{\Pi} = \frac{keQ}{r}. \quad (5)$$

Заряд сферы Q найдем по формуле (4), используя заданный в условии задачи потенциал сферы:

$$\varphi(R) = \frac{kQ}{R}; \rightarrow kQ = R\varphi(R). \quad (6)$$

Подставляя это выражение в формулу (5), получаем величину потенциальной энергии

$$W_{\Pi} = \frac{R}{r} e\varphi(R). \quad (7)$$

Вернемся к уравнению (1) закона сохранения энергии и приравняем энергию частицы в двух точках – 1 и 2 (см. рис. 31):

$$W_1 = W_2, \quad \text{или} \quad W_{K1} + W_{\Pi1} = W_{K2} + W_{\Pi2}, \quad (8)$$

где W_1 – энергия электрона на бесконечно большом расстоянии от сферы; W_2 – энергия электрона на минимальном расстоянии от поверхности сферы, равно a . Подставим в уравнение (8) величины кинетической и потенциальной энергии электрона в точках 1 и 2:

$$W_{K1} + \frac{R}{(r \rightarrow \infty)} e\varphi(R) = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{R}{(R+a)} e\varphi(R),$$

или $W_{K1} + 0 = 0 + \frac{R}{(R+a)} e\varphi(R).$ (9)

Таким образом, уравнение ЗСЭ (9) отражает тот факт, что, по мере приближения электрона к одноименно заряженной сфере, его кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию взаимодействия электрона с полем сферы. Заметим, что, после остановки электрона на мгновение в точке 2 (на минимальном расстоянии от поверхности сферы), он вновь начнет движение, ускоряясь силой отталкивания \vec{F} и удаляясь от сферы в радиальном направлении; при этом потенциальная энергия электрона будет уменьшаться, а кинетическая – возрастать, в соответствии с законом сохранения энергии (1).

Выразим искомое расстояние a из уравнения ЗСЭ (9):

$$\frac{R+a}{R} = 1 + \frac{a}{R} = \frac{e\varphi(R)}{W_{K1}}; \quad \rightarrow \quad a = R \left(\frac{e\varphi(R)}{W_{K1}} - 1 \right).$$

Вычислим расстояние a электрона от поверхности сферы:

$$a = 10 \text{ см} \cdot \left(\frac{e \cdot 300 \text{ В}}{100 \text{ эВ}} - 1 \right) = 10 \text{ см} \cdot \left(\frac{300 \text{ эВ}}{100 \text{ эВ}} - 1 \right) = 20 \text{ см}.$$

Таким образом, скорость движения электрона к заряженной сфере в условиях данной задачи уменьшается до нуля на расстоянии $a = 20 \text{ см} = 2R$ от поверхности сферы.

Задача 16. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе расстояние $d = 10 \text{ мм}$ от одной пластины до другой, приобрел скорость $v = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найдите 1) разность потенциалов U между пластинами и напряженность поля конденсатора, 2) поверхностную плотность заряда на пластинах.

Дано

$$d = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$v_0 = 0;$$

$$v = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$1) U - ? \quad E - ?$$

$$2) \sigma - ?$$

Решение

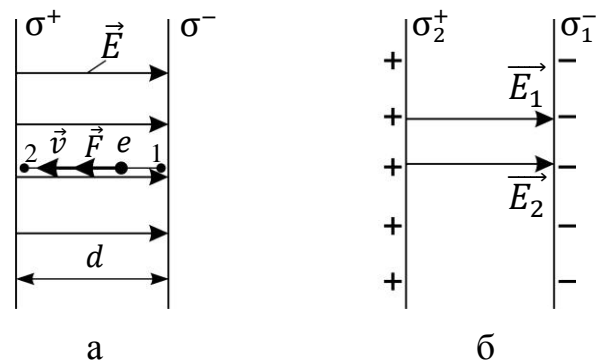


Рис. 32

1) Линии напряженности \vec{E} электростатического поля плоского конденсатора перпендикулярны заряженным пластинам. Электрон, ускоряясь силой \vec{F} , действующей на него со стороны ЭСП ($\vec{F} \parallel \vec{E}$), при движении от точки 1 вблизи отрицательно заряженной пластины до точки 2 на положительно заряженной пластине, приобрел кинетическую энергию

W_{K2} . Так как силы электростатического поля консервативные, то выполняется закон сохранения энергии электрона в следующем виде:

$$W_{K1} + W_{П1} = W_{K2} + W_{П2}, \quad (1)$$

где W_{K1} и W_{K2} – кинетическая энергия электрона в точках 1 и 2 (рис. 32 а), $W_{П1}$ и $W_{П2}$ – потенциальная энергия электрона в тех же точках поля конденсатора. Потенциальная энергия заряженной частицы (электрона) в ЭСП описывается формулой:

$$W_{П} = Q\varphi; \rightarrow W_{П} = Qe, \quad (2)$$

где $Q = e$ – заряд частицы, φ – потенциал той точки поля, в которой находится заряженная частица.

Подставим величины кинетической и потенциальной энергии в уравнение (1) ЗСЭ:

$$\frac{mv_0^2}{2} + e\varphi_1 = \frac{mv^2}{2} + e\varphi_2.$$

Перепишем это уравнение с учетом того, что начальная скорость электрона $v_0 = 0$, а разность потенциалов $(\varphi_2 - \varphi_1) = U$:

$$\frac{mv^2}{2} = e(\varphi_2 - \varphi_1) = |e|(\varphi_2 - \varphi_1) = |e|U. \quad (3)$$

Из уравнения (3) определим разность потенциалов между пластинами

$$U = \frac{mv^2}{2|e|} = \frac{v^2}{2\frac{e}{m}}, \quad (4)$$

где $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$ – удельный заряд электрона.

Вычислим разность потенциалов $U = \frac{25 \cdot 10^{12} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{2 \cdot 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}} = 71 \text{ В}$.

Определим напряженность E ЭСП конденсатора, учитывая, что это поле однородное и его напряженность, как градиент потенциала, определяется следующей формулой:

$$E = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{x_2 - x_1} = \frac{U}{d}, \quad (5)$$

где E – модуль вектора напряженности; U – разность потенциалов между пластинами конденсатора; $(x_2 - x_1) = d$ – расстояние между пластинами.

Вычисляем $E = \frac{71 \text{ В}}{1 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 7,1 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 7,1 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

2) Поверхностная плотность σ зарядов на пластинах конденсатора определяет величину напряженности поля; установим связь величин E и σ . Напряженность ЭСП внутри плоского конденсатора, в соответствии с принципом суперпозиции, равна сумме векторов напряженности полей первой и второй пластин (рис. 32 б):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (6)$$

где вектор $\vec{E}_1 \uparrow \vec{E}_2$, а модуль напряженности полей, созданных первой и второй пластинами конденсатора, определяется формулами, полученными с помощью теоремы Гаусса:

$$E_1 = \frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_0}; \quad E_2 = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}. \quad (7)$$

Так как заряды и поверхностные плотности зарядов пластин конденсатора одинаковы: $Q_2 = |Q_1|$ и $\sigma_2 = |\sigma_1|$, то, согласно формулам (7), одинаковы и напряженности полей: $E_1 = E_2$. Тогда, по принципу суперпозиции (6), модуль напряженности ЭСП в плоском конденсаторе

$$E = 2E_1 = \frac{|\sigma_1|}{\varepsilon_0}. \quad (8)$$

Из этого выражения получаем расчетную формулу поверхностной плотности заряда на пластинах конденсатора и вычисляем значение $\sigma = \sigma_2 = |\sigma_1|$:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}} \cdot 7,1 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 0,625 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 62,5 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}.$$

Задача 17. Электростатическое поле создано бесконечной прямой нитью, заряженной с линейной плотностью заряда $\tau = 20 \frac{\text{нКл}}{\text{м}}$. Определите кинетическую энергию электрона W_{K2} в точке 2, если в точке 1 его кинетическая энергия $W_{K1} = 100 \text{ эВ}$. Расстояния, задающие положения точек 1 и 2 в ЭСП, показаны на рис. 33 а.

Дано

$$\tau = 20 \frac{\text{нКл}}{\text{м}};$$

$$\text{электрон: } Q = -e;$$

$$W_{K1} = 100 \text{ эВ};$$

$$W_{K2} - ?$$

Решение

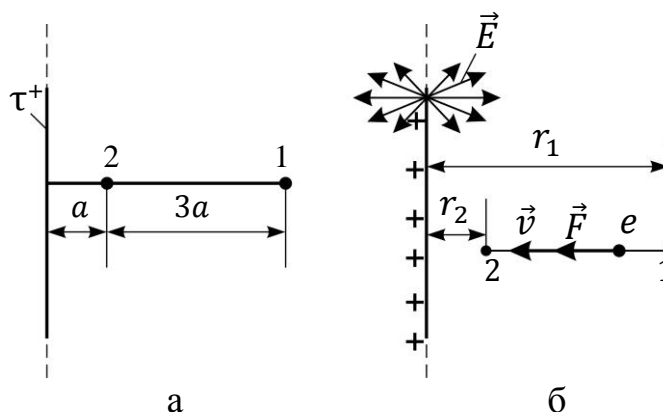


Рис. 33

Электростатическое поле, созданное заряженной нитью, имеет радиально направленные силовые линии (рис. 33 б) и имеет осевую симметрию (ось симметрии поля – заряженная нить). Напряженность такого поля в точке на расстоянии r от нити, вычисленная с помощью теоремы Гаусса, определяется формулой

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2k\tau}{r}, \quad \text{где } k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\Phi}. \quad (1)$$

Движение электрона из точки 1 в точку 2 по направлению к положительно заряженной нити будет ускоренным; оно происходит под действием силы $\vec{F} \uparrow \vec{v}$: $F = eE = \frac{2ke\tau}{r}$. Эта сила будет возрастать по мере движения электрона вследствие уменьшения расстояния r от нити. Описание движения частицы под действием переменной силы потребует

составления и решения закона динамики движения в дифференциальной форме с последующим интегрированием, что является непростой задачей.

Существует рациональный путь решения задачи с помощью закона сохранения энергии, который выполняется благодаря консервативности сил электростатического поля. Запишем формулировку ЗСЭ:

$$W_1 = W_2, \text{ или } W_{K1} + W_{П1} = W_{K2} + W_{П2}, \quad (2)$$

где W_{K1} и $W_{П1}$ – кинетическая и потенциальная энергии электрона в точке 1 (см. рис. 33 б); W_{K2} и $W_{П2}$ – те же величины в точке 2 ЭСП конденсатора.

Из уравнения (2) выразим определяемую величину кинетической энергии электрона

$$W_{K2} = W_{K1} + (W_{П1} - W_{П2}). \quad (3)$$

Потенциальная энергия частицы с зарядом Q в точке поля, имеющей потенциал φ , описывается следующей формулой:

$$W_{П} = Q\varphi; \rightarrow W_{П} = e\varphi. \quad (4)$$

С учетом формулы (4) расчетная формула (3) преобразуется к виду:

$$W_{K2} = W_{K1} + e(\varphi_1 - \varphi_2) = W_{K1} + |e|(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (5)$$

Вычислим разность потенциалов $(\varphi_2 - \varphi_1)$ в ЭСП, созданном заряженной нитью. Для этой цели используем формулу связи между напряженностью и потенциалом в виде $d\varphi = -E_r dr$:

$$\Delta\varphi = \int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \int_{r_2}^{r_1} \frac{2k\tau}{r} dr = (2k\tau \ln r) = 2k\tau \ln \frac{r_1}{r_2}. \quad (6)$$

Подставим полученную разность потенциалов в выражение (5), которое при этом преобразуется к следующему виду:

$$W_{K2} = W_{K1} + 2|e|k\tau \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

По полученной расчетной формуле вычислим кинетическую энергию электрона в точке 2, выражая начальную энергию электрона в джоулях ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$):

$$W_{K2} = 100 \text{ эВ} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}} + 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{ф}} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}} \times \ln \left(\frac{4a}{a} \right) = 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}} (100 \text{ эВ} + 500 \text{ эВ}) = 0,96 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} = 600 \text{ эВ}.$$

3.5. Конденсаторы. Энергия электрического поля

План решения задач

1) Прежде всего, необходимо изобразить на рисунке схему соединения конденсаторов согласно условию задачи. Если конденсаторов несколько и

приведена схема их соединения, то в ней нужно выделить группы конденсаторов, соединенных параллельно. Признаки параллельного соединения: а) одинаковая разность потенциалов на выделенных группах (или одинаковый потенциал обкладок, при этом крайние конденсаторы групп соединены одноименно заряженными обкладками); б) заряд батареи, который подводится при ее зарядке от источника тока (или отводится при разряде батареи), равен сумме зарядов параллельно соединенных групп конденсаторов. Например, в схеме, приведенной на рис. 34, конденсаторы C_2 и C_3 соединены последовательно $\left(\frac{1}{C_{2,3}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$. Группа этих двух

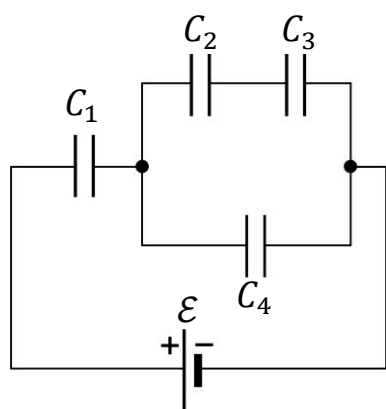


Рис.34

конденсаторов емкостью $C_{2,3}$ соединена параллельно с конденсатором емкостью C_4 . Но конденсатор емкостью C_1 соединен последовательно с группой конденсаторов (C_2 , C_3 и C_4), емкость которой равна $(C_{2,3} + C_4)$.

2) В случае соединения двух предварительно заряженных проводников или конденсаторов, а также при подключении незаряженного проводника (конденсатора) к заряженному проводнику происходит *перераспределение зарядов* между проводниками или обкладками конденсаторов. При этом обязательно выполняется *закон сохранения*

электрического заряда (ЗСЗ), так как соединяемые проводники (конденсаторы), окруженные слоем диэлектрика – воздуха, образуют замкнутую (электрически изолированную) систему.

3) Суммарная энергия электростатических полей проводников (конденсаторов) *до их соединения* обычно больше энергии ЭСП *после соединения* проводников. Это согласуется с *законом сохранения энергии*, так как часть энергии начальных электростатических полей выделяется при протекании по проводникам тока перезарядки (преобразуется при их нагреве во внутреннюю энергию проводников), преимущественно, в слабо ионизированном воздухе путем образования искры.

Задача 18. Два заряженных металлических шара, первый радиусом $R_1 = 2$ см, имеющий заряд $Q_1 = 30$ нКл, а второй – радиусом $R_2 = 3$ см, имеющий потенциал $\varphi_2 = 5$ кВ, соединили проводником, емкостью которого можно пренебречь. Определите 1) заряд второго шара до соединения шаров, 2) потенциал шаров φ' после их соединения,

3) энергии W_1 и W_2 каждого шара до соединения, 4) их энергии W_1' и W_2' после соединения шаров.

Дано

$R_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ м;
 $Q_1 = 30$ нКл;
 $R_2 = 3 \cdot 10^{-2}$ м;
 $\varphi_2 = 5$ кВ;
 $C_{\text{пров}} \approx 0$.

Решение

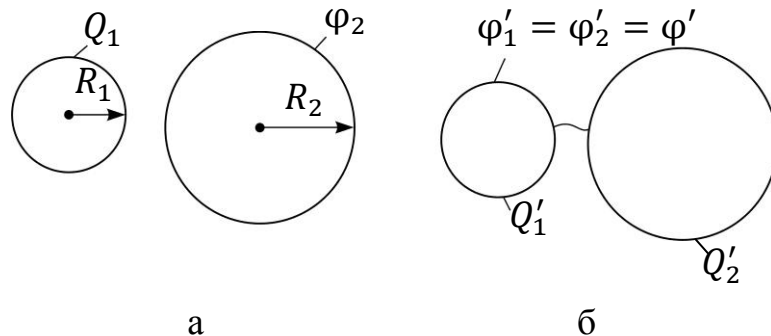


Рис. 35

- 1) $Q_2 - ?$ 2) $\varphi' - ?$
 3) $W_1 - ?$ $W_2 - ?$
 4) $W_1' - ?$ $W_2' - ?$

1) Условия статического равновесия свободных электронов в заряженном проводнике: а) напряженность ЭСП $E_{\text{внутри шара}} = 0$ (только при этом электрическая сила, действующая на электроны, $F_{\text{эл}} = eE = 0$); б) потенциал проводника $\varphi_{\text{внутри шара}} = \varphi_{\text{поверхности}} = \varphi(R)$; в) весь избыточный заряд находится на поверхности проводника. Таким образом, потенциал φ металлического шара равен потенциалу сферы, равномерно заряженной по поверхности:

$$\varphi = \frac{kQ}{\varepsilon R}, \quad (1)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$ – коэффициент пропорциональности в законе Кулона; Q – заряд шара; ε – диэлектрическая проницаемость среды (для воздуха $\varepsilon \approx 1$); R – радиус шара.

Заряд второго шара выразим из формулы (1):

$$Q_2 = \frac{\varphi_2 R_2}{k}.$$

Вычисляем $Q_2 = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}} = 1,67 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} = 16,7 \text{ нКл}.$

2) При соединении шаров (рис. 35) заряды на них перераспределяются так, чтобы образовался один эквипотенциальный проводник:

$$\varphi'_1 = \varphi'_2 = \varphi'.$$

Иначе, если будет разность потенциалов между шарами, то будет протекать электрический ток, в соответствии с законом Ома: $I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$, где R – сопротивление соединительного проводника.

Потенциал шаров φ' связан с их суммарным зарядом Q' формулой

$$C\varphi' = Q', \quad (2)$$

где $C = (C_1 + C_2)$ – емкость двух соединенных шаров, ее находим, как для параллельно соединенных конденсаторов, так как аналогично таковому, с поверхности соединенных шаров при их разряде отведется сумма зарядов шаров $Q' = (Q'_1 + Q'_2)$. Эту сумму найдем, используя закон

сохранения заряда: сумма зарядов шаров до соединения равна суммарному заряду соединенных шаров:

$$Q' = Q_1 + Q_2;$$

(соединительный проводник практически не приобрел заряд, так как его емкость пренебрежимо мала: $Q_{\text{пров}} = C_{\text{пров}}\varphi' \approx 0$). Подставим величину Q' в формулу (2) и определим из нее потенциал шаров

$$\varphi' = \frac{Q'}{C} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}; \quad (3)$$

Емкость шара найдем по определительной формуле, используя значение потенциала шара, определяемое формулой (1):

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q\varepsilon R}{kQ} = \frac{\varepsilon R}{k}; \rightarrow C_1 = \frac{\varepsilon R_1}{k}; C_2 = \frac{\varepsilon R_2}{k}. \quad (4)$$

Эти значения емкости шаров подставим в формулу (3), принимая для воздуха $\varepsilon \approx 1$:

$$\varphi' = \frac{k(Q_1 + Q_2)}{R_1 + R_2}. \quad (5)$$

Вычисляем по формуле (5) потенциал шаров после их соединения:

$$\varphi' = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot (30 + 16,7) \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{(2 + 3) \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 8,41 \cdot 10^3 \text{ В} = 8,41 \text{ кВ}.$$

3) Значения энергии электростатического поля заряженных шаров до их соединения найдем по формуле

$$W = \frac{Q^2}{2C}.$$

Подставляя величину емкости по формуле (4), получаем расчетные формулы:

$$W = \frac{kQ^2}{2R}; \rightarrow W_1 = \frac{kQ_1^2}{2R_1}; W_2 = \frac{kQ_2^2}{2R_2}.$$

Вычисляем значения энергий ЭСП шаров до их соединения:

$$W_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot 30^2 \cdot 10^{-18} \text{ Кл}^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} = 225 \text{ мкДж};$$

$$W_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}} \cdot (16,7)^2 \cdot 10^{-18} \text{ Кл}^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 41,8 \text{ мкДж}.$$

Значения энергии ЭСП соединенных шаров, потенциал которых равен φ' , найдем по следующей формуле:

$$W' = \frac{C(\varphi')^2}{2}; \rightarrow W_1' = \frac{R_1(\varphi')^2}{2k}; W_2' = \frac{R_2(\varphi')^2}{2k}. \quad (7)$$

Вычисляем по этим формулам энергии соединенных шаров:

$$W_1' = \frac{2 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 8,41^2 \cdot 10^6 \text{ В}^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}}} = 78,6 \text{ мкДж};$$

$$W_2' = \frac{3 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 8,41^2 \cdot 10^6 \text{ В}^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}}} = 118 \text{ мкДж}.$$

Используя закон сохранения энергии в следующем виде:

$$W_1 + W_2 = W_1' + W_2' + \Delta W,$$

определяем энергию ΔW , которая пошла на образование искры шаров:

$$\Delta W = W_1 + W_2 - (W_1' + W_2') = (225 + 42 - (79 + 118)) \text{ мкДж} \\ = 70 \text{ мкДж}.$$

Таким образом, на образование искры в момент соединения затрачена часть энергии $\delta = \frac{70 \text{ мкДж}}{267 \text{ мкДж}} = 0,26$, (26%) от начальной энергии шаров.

Задача 19. Конденсаторы емкостями $C_1 = 2 \text{ мкФ}$, $C_2 = 5 \text{ мкФ}$, $C_3 = 4 \text{ мкФ}$ и $C_4 = 3 \text{ мкФ}$ соединены так, как показано на рис. 36 а. Разность потенциалов между точками А и В $U = 300 \text{ В}$. Определите 1) заряд на пластинах каждого конденсатора, 2) заряд батареи конденсаторов и 3) разность потенциалов на каждом конденсаторе.

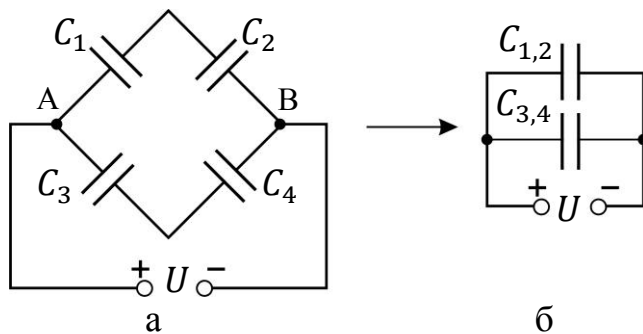


Рис. 36

Дано

- $C_1 = 2 \text{ мкФ};$
 $C_2 = 5 \text{ мкФ};$
 $C_3 = 4 \text{ мкФ};$
 $C_4 = 3 \text{ мкФ};$
 $U = 300 \text{ В}.$

- 1) Q_i —? 2) Q —?
 3) U_i —? $i = 1, 2, 3, 4.$

Решение

1) Конденсаторы емкостями C_1 и C_2 соединены между собой последовательно, поэтому заряд на их обкладках одинаков и равен заряду этого звена емкостью $C_{1,2}$:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{1,2}. \quad (1)$$

Для определения заряда на обкладках конденсаторов используем формулу

$$C_{1,2}U = Q_{1,2}, \quad (2)$$

где емкость $C_{1,2}$ найдем по формуле последовательного соединения конденсаторов:

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (3)$$

Вычислим $\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{2 \text{ мкФ}} + \frac{1}{5 \text{ мкФ}} = \frac{7}{10} \text{ мкФ}^{-1}; \rightarrow C_{1,2} = \frac{10}{7} \text{ мкФ} = 1,43 \text{ мкФ}.$

Используя формулы (1) и (2), вычисляем заряд на обкладках этих конденсаторов:

$$Q_1 = Q_2 = 1,43 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 300 \text{ В} = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ Кл} = 0,43 \text{ мКл}.$$

Аналогичный расчет выполняем для пары конденсаторов емкостями C_3 и C_4 :

$$\frac{1}{C_{3,4}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{4 \text{ мкФ}} + \frac{1}{3 \text{ мкФ}} = \frac{7}{12} \text{ мкФ}^{-1}; \rightarrow C_{1,2} = \frac{12}{7} \text{ мкФ} = 1,7 \text{ мкФ}.$$

Заряды на обкладках конденсаторов

$$Q_3 = Q_4 = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 300 \text{ В} = 0,51 \text{ мКл}.$$

2) Из эквивалентной схемы электрической цепи (рис. 36 б) следует, что при параллельном соединении звеньев емкостями $C_{1,2}$ и $C_{3,4}$ электроемкость всей цепи

$$C = C_{1,2} + C_{3,4} = 3,13 \text{ мкФ}.$$

По формуле (2) вычисляем заряд, который можно отвести с этой батареи конденсаторов

$$Q = CU = 3,13 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 300 \text{ В} = 0,94 \text{ мКл}.$$

Отметим, что этот заряд $Q = Q_1 + Q_3$ (см. рис. 36 б).

3) Напряжение на каждом конденсаторе найдем с помощью следующей формулы:

$$C_i U_i = Q_i; \rightarrow U_i = \frac{Q_i}{C_i}. \quad (4)$$

Вычисляем напряжение по полученной формуле:

$$U_1 = \frac{0,43 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} = 215 \text{ В}; \quad U_2 = \frac{0,43 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}}{5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} = 86 \text{ В};$$

$$U_3 = \frac{0,51 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}}{4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} = 128 \text{ В}; \quad U_4 = \frac{0,51 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}}{3 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} = 170 \text{ В}.$$

Отметим, что вычисленные напряжения на конденсаторах согласуются со схемой электрической цепи (см. рис. 36 а):

$$(U_1 + U_2) = U = (300 \pm 1) \text{ В} \text{ и } (U_3 + U_4) = U = (300 \pm 2) \text{ В}.$$

Задача 20. Между обкладками заряженного конденсатора вдвигается пластина диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ , плотно прилегающая к обкладкам. Сравните следующие величины до и после внесения диэлектрика: 1) заряды конденсатора Q_0 и Q_1 ; 2) разности потенциалов U_0 и U_1 ; 3) емкости конденсатора C_0 и C_1 ; 4) напряженности E_0 и E_1 электростатического поля между пластинами; 5) энергии конденсатора W_0 и W_1 . Рассмотрите два случая: а) конденсатор отключен от источника тока; б) конденсатор подсоединен к источнику тока.

Дано

Решение

	C_0	C_0	C_1
а) конденсатор отключен (рис. 37 а);			
б) конденсатор подключен (рис. 37 б).			

1) $\frac{Q_1}{Q_0} - ?$ 2) $\frac{U_1}{U_0} - ?$ 3) $\frac{C_1}{C_0} - ?$

4) $\frac{E_1}{E_0} - ?$ 5) $\frac{W_1}{W_0} - ?$

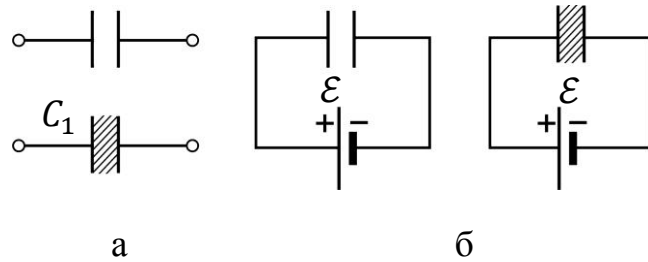


Рис. 37

а) Диэлектрическая пластина вдвигается в конденсатор, отключенный от источника тока (рис. 37 а).

1) Заряд обкладок конденсатора остается неизменным, так как обкладки электрически изолированы:

$$Q_1 = Q_0; \rightarrow \frac{Q_1}{Q_0} = 1.$$

3) Электроемкость плоского конденсатора описывается формулой

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d}. \quad (1)$$

Согласно этой формуле, величина C увеличится в ϵ раз при внесении диэлектрика, так как для воздуха $\epsilon_{\text{возд}} \approx 1$:

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_{\text{возд}}} \approx \epsilon.$$

2) Напряжение на конденсаторе изменяется в соответствии с формулой

$$CU = Q = \text{const}. \quad (2)$$

При увеличении емкости C в ϵ раз величина напряжения U снизится в ϵ раз, чтобы произведение этих величин, равное заряду обкладок, не изменилось.

4) Для однородного электростатического поля в плоском конденсаторе напряженность поля

$$E = \frac{U}{d}, \quad (3)$$

где d – расстояние между обкладками, оно остается неизменным. Согласно формуле (3), снижение напряжения U на конденсаторе в ϵ раз приведет к уменьшению напряженности ЭСП тоже в ϵ раз, так как эти величины пропорциональны друг другу.

5) Сравним энергии ЭСП: так как заряд обкладок Q не изменяется, то используем следующую формулу:

$$W = \frac{Q^2}{2C}. \quad (4)$$

В этом случае отношение энергий

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{C_0}{C_1} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно, энергия электрического поля конденсатора уменьшилась в ε раз.

б) *Пластина диэлектрика вдвигается в конденсатор, подсоединенный к источнику тока (рис. 37 б).*

2) Напряжение на конденсаторе равно ЭДС источника тока: $U = \mathcal{E}$, – так как каждый проводник, соединяющий источник тока с обкладкой конденсатора, в условиях электростатики эквипотенциален. Таким образом, $U_1 = U_0 = \mathcal{E}$ и отношение $\frac{U_1}{U_0} = 1$.

3) Емкость зависит только от геометрических параметров (размеров и формы обкладок) конденсатора и от диэлектрической проницаемости диэлектрика ε , и не зависит ни от заряда конденсатора, ни от разности потенциалов между обкладками. Поэтому, в соответствии с формулой (1), так же, как и в случае «а», емкость конденсатора при помещении пластины диэлектрика увеличится в ε раз.

1) В соответствии с формулой $CU = Q$, увеличение емкости конденсатора C в ε раз при неизменном напряжении U приведет к увеличению заряда обкладок также в ε раз. Необходимые для этого дополнительные заряды придут на обкладки конденсатора с полюсов источника тока.

4) В соответствии с формулой (3), при неизменном напряжении U останется прежней и напряженность электрического поля конденсатора: $E_1 = E_0$.

5) Значения энергии ЭСП сравним, используя формулу $W = \frac{CU^2}{2}$, так как напряжения на обкладках одинаковы: $U_1 = U_0$. Согласно записанной формуле

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{C_1}{C_0} = \varepsilon,$$

т. е. энергия электрического поля конденсатора увеличилась в ε раз.

ЧАСТЬ 2
ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК
4. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

4.1. Сила тока. Плотность тока. Сопротивление проводника

Сила тока I , или ток, по определению

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (1)$$

где dQ – бесконечно малый заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время dt .

Сила постоянного тока $I = \frac{Q}{t}$.

Плотность тока $j = \frac{I}{S}$, (2)

где S – поперечное (перпендикулярное скорости движения носителей тока) сечение проводника.

Сопротивление проводника длиной l и поперечным сечением S :

$$R = \frac{\rho l}{S}. \quad (3)$$

Здесь ρ – удельное сопротивление материала проводника. При увеличении температуры металлического проводника его удельное сопротивление возрастает по линейной зависимости:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t). \quad (4)$$

Здесь ρ_0 – удельное сопротивление проводника при $t = 0$ °С; t – температура проводника по шкале Цельсия; α – температурный коэффициент сопротивления (ТКС) металла.

Сопротивление *последовательно соединенных проводников* (рис. 38):

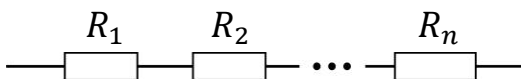


Рис. 38

$$R = \sum R_i. \quad (5)$$

Сопротивление *параллельно соединенных проводников* (рис. 39):



Рис. 39

4.2. Закон Ома. Правила Кирхгофа

Закон Ома для неоднородного участка цепи (рис. 40 а):

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathcal{E}_{12}}{R} = \frac{U}{R}; \quad R = r + R_1. \quad (7)$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка, \mathcal{E}_{12} – ЭДС (электродвижущая сила) источника тока, R – сопротивление участка, U – напряжение на участке цепи, r – внутреннее сопротивление источника тока.

Для *однородного участка цепи* (не содержащего источника тока: $\mathcal{E} = 0$) (рис. 40 б) уравнение (37) принимает следующий вид:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R} = \frac{U}{R}. \quad (8)$$

Для *замкнутой цепи* (точки цепи 1 и 2 совпадают, следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2$) (рис. 40 в) уравнение (7) преобразуется к виду:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}, \quad (9)$$

где R_1 – сопротивление внешнего участка цепи, r – внутреннее сопротивление источника тока.

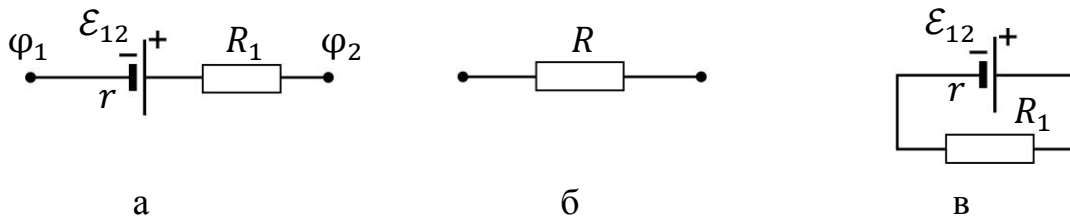


Рис. 40

Закон Ома в дифференциальной форме связывает плотность тока \vec{j} в любой точке электрической цепи с напряженностью \vec{E} электрического поля в этой точке:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}. \quad (10)$$

Правила Кирхгофа используются для расчета разветвленных цепей, содержащих несколько замкнутых контуров.

Первое правило – алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I_i = 0. \quad (11)$$

Здесь положительными считают токи, входящие в узел (приносящие заряд), а отрицательными – выходящие из узла (уносящие заряд).

Второе правило – в любом замкнутом контуре, выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений токов I_i на сопротивления R_i на всех участках контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (12)$$

4.3. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

Работа по переносу заряда при протекании тока в электрической цепи совершается электростатическим полем в проводнике и сторонними силами, действующими в источнике тока. Работа, совершаемая за время t :

$$A = IUt, \quad (13)$$

где I и U – сила тока и напряжение на участке цепи.

Мощность тока $P = \frac{A}{t}$; с учетом формулы (13) и закона Ома (7) получают следующие формулы для расчета мощности:

$$P = IU; \quad P = I^2 R; \quad P = \frac{U^2}{R}. \quad (14)$$

Закон Джоуля – Ленца: количество теплоты Q , выделяемое в участке цепи за время t , определяется следующими формулами:

$$Q = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (15)$$

По закону сохранения энергии $Q = A$ – в том случае, если проводник с током неподвижен (сравните формулы (13) и (14) с формулой (15)).

5. РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛУ «ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК»

1) Изобразите на рисунке схему электрической цепи (или схемы цепей) в соответствии с условием задачи. Покажите на схемах направление токов на участках цепи. В том случае, если в контуре электрической цепи есть источник тока, то он определяет направления токов: от положительного полюса источника к отрицательному полюсу. Если же в электрической цепи нет источника тока, то направление токов на ее участках задают произвольно. Но при наличии узла в электрической цепи (точки, где сходятся три или более проводов), необходимо учесть, что в любом узле

должны быть как входящие токи (приносящие положительный заряд в узел), так и выходящие из узла токи (они уносят положительный заряд). Иначе, в соответствии с законом сохранения заряда, будет изменяться заряд узла электрической цепи, а значит, и потенциал этой точки, что приведет к изменению тока в цепи, – согласно закону Ома.

2) Следует иметь в виду, что напряжение, измеряемое вольтметром, на неоднородном участке цепи (рис. 41) – это величина $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$,

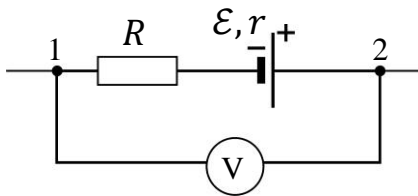


Рис. 41

где \mathcal{E} – ЭДС источника тока. В случае однородного участка цепи (не содержащего источника тока: $\mathcal{E} = 0$) величина измеряемого напряжения совпадает с разностью потенциалов ($\varphi_1 - \varphi_2$) на концах этого участка.

3) Используя в решении задачи закон Ома, применяйте для однородного участка цепи формулу $I = \frac{U}{R}$, либо в дифференциальной форме: $j = \frac{E}{\rho}$, – а для замкнутой цепи используйте формулу $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$.

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 21. При измерении мультиметром постоянного напряжения в диапазоне до $U_0 = 0,2$ В сопротивление прибора $R_V = 1$ кОм. Какие сопротивления R_i используются в приборе и как они подсоединяются к сопротивлению R_V для переключения диапазона измерений на U_i , равные 2; 20; 200 и 600 В?

Дано

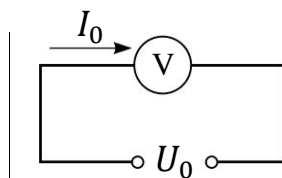
$$U_0 = 0,2 \text{ В};$$

$$R_V = 1 \text{ кОм};$$

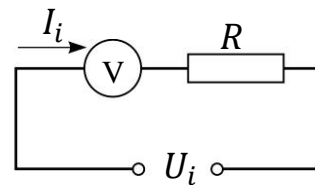
$$U_i = 2; 20; 200; 600 \text{ В}.$$

$$R_i - ?$$

Решение



а



б

Рис. 42

При подключении мультиметра на напряжение U_0 через прибор протекает ток I_0 (рис. 42 а); величина его, в соответствии с законом Ома:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_V}. \quad (1)$$

Значение I_0 является наибольшим допустимым для данного прибора. При подключении этого мультиметра на напряжение в большем диапазоне U_i ток, согласно формуле (1), возрастал бы. Чтобы снизить его до $I_i = I_0$, необходимо увеличить сопротивление цепи. Это делают путем подключения последовательно к сопротивлению R_V (сопротивлению

прибора на минимальном диапазоне) *добавочного сопротивления* R (рис. 42 б); при этом ток в цепи, согласно закону Ома:

$$I_i = \frac{U_i}{R_V + R_i}. \quad (2)$$

Приравнявая максимальный ток, идущий через прибор, определяемый формулами (1) и (2), получаем формулу для расчета величины добавочного сопротивления R_i :

$$\frac{U_0}{R_V} = \frac{U_i}{R_V + R_i}; \quad R_i = R_V \frac{(U_i - U_0)}{U_0}; \quad \rightarrow \quad R_i = R_V \left(\frac{U_i}{U_0} - 1 \right). \quad (3)$$

Вычисляем величины добавочных сопротивлений R_i для заданных диапазонов измеряемых напряжений U_i по формуле (3):

$$\text{Для } U_1 = 2 \text{ В: } R_1 = 1 \text{ кОм} \left(\frac{2 \text{ В}}{0,2 \text{ В}} - 1 \right) = 9 \text{ кОм};$$

$$R_2 = 99 \text{ кОм} = 0,099 \text{ МОм}; \quad R_3 = 0,999 \text{ МОм};$$

$$R_4 = 2,999 \text{ МОм} = 3,00 \text{ МОм}.$$

Задача 22. При измерении мультиметром постоянного тока в диапазоне до $I_0 = 2 \text{ мА}$ сопротивление прибора $R_A = 1 \text{ Ом}$. Какие сопротивления R_i используются в приборе и как они подключаются к сопротивлению R_A при переключении диапазона измерений на токи I_i , равные 20; 200 мА и 10 А?

Дано

$$I_0 = 2 \text{ мА};$$

$$R_A = 1 \text{ Ом};$$

$$I_i = 20; 200 \text{ мА}; 10 \text{ А}.$$

$$R_i - ?$$

Решение

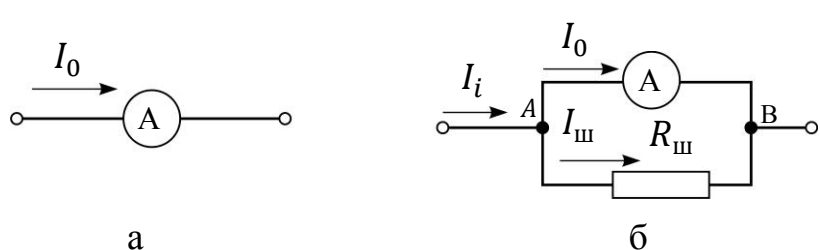


Рис. 43

При использовании мультиметра в режиме работы амперметра с диапазоном измеряемых токов до 2 мА через прибор может протекать максимальный ток I_0 (рис. 43 а), равный, в соответствии с законом Ома:

$$I_0 = \frac{U}{R_A}. \quad (1)$$

Значение I_0 является наибольшим из допустимых значений тока для данного прибора. Чтобы измерять этим мультиметром ток большего диапазона I_i , необходимо часть тока, равную $(I_i - I_0)$, отвести в другую ветвь электрической цепи (рис. 43 б). Сопротивление $R_{ш}$ этой ветви называют *шунтирующим сопротивлением* (или кратко – шунт). При этом через прибор будет протекать ток, равный I_0 – максимальный при измеряемом токе, равном верхней границе диапазона I_i , или кратный I_0 – при измеряемых токах, меньших значения I_i . Таким образом,

шунтирующее сопротивление подключают параллельно сопротивлению прибора R_A на минимальном диапазоне.

Соотношение токов I_0 (через сопротивление R_A) и $I_{ш}$ (через шунт) найдем, записывая второе правило Кирхгофа для замкнутого контура электрической цепи (см. рис. 43 б), выбрав направление обхода контура – по часовой стрелке:

$$I_0 R_A - I_{ш} R_{ш} = 0. \quad (2)$$

Здесь в правой части уравнения записан нуль, так как в контуре нет ЭДС источника тока.

Из уравнения (2) выразим искомое сопротивление шунта

$$R_{ш} = R_A \frac{I_0}{I_{ш}}. \quad (3)$$

Соотношение между током $I_{ш}$ и измеряемым током I_i найдем, используя первое правило Кирхгофа для узла A электрической цепи (см. рис. 43 б):

$$I_i - I_0 - I_{ш} = 0. \quad (4)$$

Величины I_0 и $I_{ш}$ в сумме токов взяты со знаком «минус», так как эти токи уносят заряд из узла A , в отличие от тока I_i , приносящего заряд в узел A электрической цепи.

Величину тока $I_{ш} = I_i - I_0$, согласно уравнению (4), подставим в формулу (3) и получим следующую расчетную формулу:

$$R_{ши} = R_A \frac{I_0}{(I_i - I_0)} = \frac{R_A}{\left(\frac{I_i}{I_0} - 1\right)}. \quad (5)$$

Из последней формулы следует, что сопротивление $R_{ш} < R_A$, так как большую часть измеряемого тока нужно отвести в параллельную шунтирующую ветвь.

Вычисляем сопротивления шунтов по формуле (5):

$$R_{ш1} = \frac{1 \text{ Ом}}{\left(\frac{20 \text{ мА}}{2 \text{ мА}} - 1\right)} = 0,111 \text{ Ом}; \quad R_{ш2} = 0,0101 \text{ Ом};$$

$$R_{ш3} = \frac{1 \text{ Ом}}{\left(\frac{10 \text{ А}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ А}} - 1\right)} = 0,200 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} = 0,200 \text{ мОм}.$$

Заметим, что шунтирование в электрических цепях применяется в электротехнических устройствах, а также бывает в электрической дуге, в частности, в дуговом газовом разряде, который применяется для сварки металлов, и в электродуговой печи для получения легированной стали.

Задача 23. Допустимая рабочая величина плотности тока для медного проводника $j = 10 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2}$. Определите при данном токе следующие величины: 1) напряженность E электрического поля в этом проводнике; 2) напряжение U на концах проводника длиной $l = 10$ м и площадью

поперечного сечения $S = 1 \text{ мм}^2$; 3) мощность P , которая выделяется в этом проводнике.

Дано

$$j = 10 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2};$$

$$\rho = 17 \text{ нОм} \cdot \text{м};$$

$$l = 10 \text{ м};$$

$$S = 1 \text{ мм}^2.$$

$$1) E - ? \quad 2) U - ?$$

$$3) P - ?$$

Решение

1) Плотность тока j в проводнике зависит от напряженности E электрического поля, которое имеется в каждой точке проводника при протекании в нем тока, в соответствии с законом Ома в дифференциальной форме:

$$j = \frac{E}{\rho}, \quad (1)$$

где ρ – удельное сопротивление материала проводника.

Из формулы закона (1) получаем расчетную формулу напряженности электрического поля в проводнике:

$$E = j\rho.$$

Вычисляем величину $E = 10 \cdot 10^6 \frac{\text{А}}{\text{м}^2} \cdot 17 \cdot 10^{-9} \text{ Ом} \cdot \text{м} = 0,17 \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

2) Считая, что электрическое поле внутри однородного проводника является однородным, используем для этого квазистатического поля формулу связи напряженности с разностью потенциалов, как для электростатического поля, в следующем виде:

$$E = \frac{\Delta\varphi_{12}}{l}; \rightarrow U = \Delta\varphi_{12} = El. \quad (2)$$

Вычисляем напряжение, равное разности потенциалов на концах однородного участка цепи, по формуле (2):

$$U = 0,17 \frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot 10 \text{ м} = 1,7 \text{ В}.$$

3) Электрическую мощность, которая выделяется в проводнике, можно рассчитать по формуле закона Джоуля – Ленца:

$$P = \frac{Q}{t} = I^2 R.$$

Заменяя в этой формуле ток, в соответствии с законом Ома: $I = \frac{U}{R}$, получаем расчетную формулу величины мощности:

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad (3)$$

где R – сопротивление проводника; для однородного проводника с постоянным сечением S справедлива формула

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (4)$$

Выполним расчет по формуле (4), чтобы оценить порядок величины электрического сопротивления таких проводников, используемых, в частности, в бытовой технике:

$$R = 17 \cdot 10^{-9} \text{ Ом} \cdot \text{м} \cdot \frac{10 \text{ м}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2} = 0,17 \text{ Ом}.$$

Вычисляем по формуле (3) электрическую мощность, выделяемую в проводнике при протекании в нем тока:

$$P = \frac{1,7^2 \text{ В}^2}{0,17 \text{ Ом}} = 17 \text{ Вт}.$$

Задача 24. При подключении сопротивления R_1 к источнику тока в нем протекает ток $I_1 = 1 \text{ А}$ и на этом сопротивлении выделяется мощность $P_1 = 10 \text{ Вт}$, а при другой величине внешнего сопротивления, равной R_2 , ток в цепи $I_2 = 3 \text{ А}$ и на сопротивлении R_2 выделяется мощность $P_2 = 24 \text{ Вт}$. Определите следующие величины: 1) внутреннее сопротивление источника тока r ; 2) ЭДС источника тока \mathcal{E} ; 3) ток короткого замыкания источника тока $I_{\text{кз}}$; 4) КПД источника тока при двух сопротивлениях внешней цепи, равных R_1 и R_2 .

Дано

$$I_1 = 1 \text{ А};$$

$$P_1 = 10 \text{ Вт};$$

$$I_2 = 3 \text{ А};$$

$$P_2 = 24 \text{ Вт}.$$

- 1) r —? 2) \mathcal{E} —?
 3) $I_{\text{кз}}$ —?
 4) η_1 —? η_2 —?

Решение

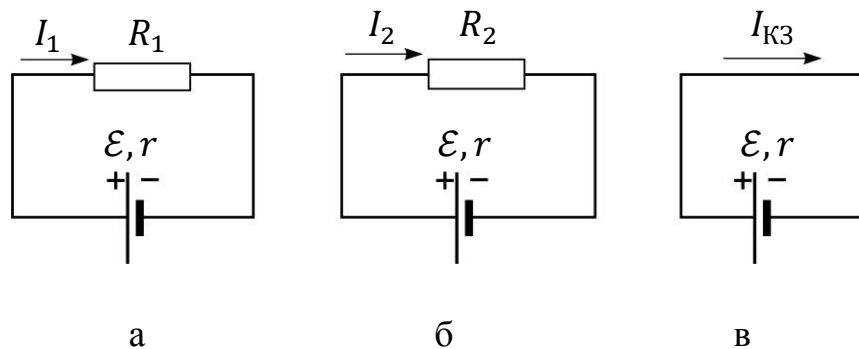


Рис. 44

1) Для замкнутых цепей (рис. 44 а и рис. 44 б) ток I и ЭДС источника тока \mathcal{E} связаны законом Ома в следующем виде:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}. \quad (1)$$

Из этих формул получаем следующие соотношения величин:

$$\mathcal{E} = I_1 R_1 + I_1 r;$$

$$\mathcal{E} = I_2 R_2 + I_2 r.$$

Приравняв правые части записанных формул, исключаем неизвестную величину \mathcal{E} и получаем расчетную формулу внутреннего сопротивления источника тока:

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}. \quad (2)$$

Чтобы найти сопротивления внешней цепи R_1 и R_2 , используем закон Джоуля – Ленца – зависимость выделяемой мощности от величины сопротивления, в следующем виде:

$$P_1 = I_1^2 R_1; \quad P_2 = I_2^2 R_2.$$

Из этих формул определяем сопротивления: $R_1 = \frac{P_1}{I_1^2}$ и $R_2 = \frac{P_2}{I_2^2}$. Подставляя полученные значения сопротивлений в выражение (2), получаем расчетную формулу для величины r в следующем виде:

$$r = \frac{\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2}}{I_2 - I_1}. \quad (4)$$

Вычисляем внутреннее сопротивление источника тока:

$$r = \frac{\left(\frac{10 \text{ Вт}}{1 \text{ А}} - \frac{24 \text{ Вт}}{3 \text{ А}}\right)}{(3-1) \text{ А}} = 1 \text{ Ом}.$$

2) Электродвижущую силу источника тока \mathcal{E} находим с помощью закона Ома (1):

$$\mathcal{E} = I_1(R_1 + r) = I_1 \left(\frac{P_1}{I_1^2} + r\right).$$

Вычисляем величину ЭДС: $\mathcal{E} = 1 \text{ А} \cdot \left(\frac{10 \text{ Вт}}{1^2 \text{ А}^2} + 1 \text{ Ом}\right) = 11 \text{ В}$.

3) Ток короткого замыкания $I_{\text{КЗ}}$ – это максимальный ток, который можно получить от данного источника тока. Он протекает в электрической цепи (рис. 44 в) при отсутствии внешнего сопротивления и, согласно закону Ома (1), определяется следующей формулой:

$$I_{\text{КЗ}} = \frac{\mathcal{E}}{r}; \quad \text{вычисляем } I_{\text{КЗ}} = \frac{11 \text{ В}}{1 \text{ Ом}} = 11 \text{ А}.$$

4) Коэффициент полезного действия η источника тока равен отношению полезной мощности, которая выделяется на внешнем сопротивлении (сопротивлении нагрузки), к полной мощности, которая выделяется во всей цепи, в том числе и в источнике тока. Используя закон Джоуля – Ленца, определяем величину КПД источника тока:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{P} = \frac{I^2 R}{I^2 (R+r)}; \rightarrow \eta = \frac{R}{(R+r)} = \frac{1}{1+\frac{r}{R}}.$$

Вычисляем значения КПД, используя формулы для сопротивлений нагрузки $R_1 = \frac{P_1}{I_1^2}$ и $R_2 = \frac{P_2}{I_2^2}$:

$$\eta_1 = \frac{1}{1+\frac{rI_1^2}{P_1}} = \frac{1}{1+\frac{1 \text{ Ом} \cdot 1^2 \text{ А}^2}{10 \text{ Вт}}} = 0,90;$$

$$\eta_2 = \frac{1}{1+\frac{rI_2^2}{P_2}} = \frac{1}{1+\frac{1 \text{ Ом} \cdot 3^2 \text{ А}^2}{24 \text{ Вт}}} = 0,73.$$

Задача 25. Электродвижущая сила источника тока $\mathcal{E} = 24$ В, ток короткого замыкания $I_{\text{кз}} = 10$ А. Определите следующие величины: 1) сопротивление внешней цепи, при котором выделяется максимальная мощность P_{max} ; 2) величину P_{max} , которую можно получить от данного источника тока, и КПД η источника тока при этой мощности; 3) сопротивление нагрузки R_1 , при котором КПД $\eta_1 = 95\%$.

Дано

$$\mathcal{E} = 24 \text{ В};$$

$$I_{\text{кз}} = 10 \text{ А}.$$

$$1) R - ? \text{ при } P_{\text{max}}$$

$$2) P_{\text{max}} - ? \quad \eta - ?$$

$$3) R_1 - ? \text{ при } \eta_1 = 0,95.$$

Решение

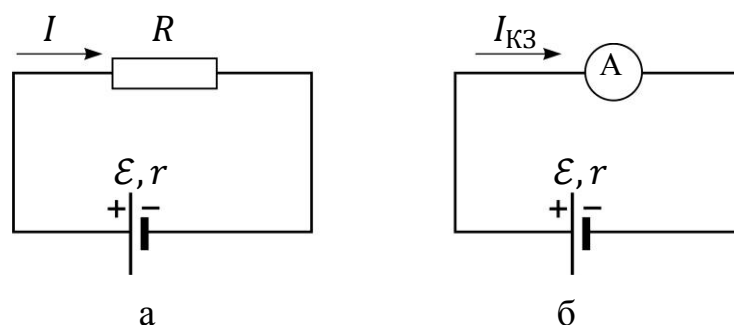


Рис. 45

1) Мощность P , выделяемая в сопротивлении R внешней цепи (рис. 45 а), определяется законом Джоуля – Ленца:

$$P = I^2 R, \quad (1)$$

где I – ток в цепи, который найдем по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}. \quad (2)$$

Здесь r – внутреннее сопротивление цепи, или сопротивление источника тока.

2) Подставляя величину тока по формуле (2) в уравнение (1), получаем следующую формулу:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}. \quad (3)$$

Зависимость полезной мощности, выделяемой в сопротивлении нагрузки R , от величины этого сопротивления, представленная формулой (3), имеет $P(R = 0) = 0$ и $P(R \rightarrow \infty) = 0$. Между этими нулевыми значениями есть максимальное P_{max} (так как величина $P > 0$). Запишем условие максимума функции $P(R)$:

$$\frac{dP}{dR} = 0 = \frac{\mathcal{E}^2(2(R+r)R - 1 \cdot (R+r)^2)}{(R+r)^4}; \rightarrow (2R - R - r) = 0, \text{ или } R = r. \quad (4)$$

Таким образом, максимальная мощность развивается источником тока при сопротивлении нагрузки, равном сопротивлению источника тока.

Сопротивление источника тока r обычно измеряют методом вольтметра – амперметра в электрической цепи, схема которой приведена

на рис. 45 б. Вольтметром измеряют ЭДС источника тока, в данной задаче она известна. Амперметром, сопротивление которого R_A обычно мало ($R_A \ll r$), измеряют ток короткого замыкания $I_{кз}$. Из формулы (2) закона Ома определяем сопротивление источника тока:

$$I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}; \quad \rightarrow \quad r = \frac{\varepsilon}{I_{кз}}. \quad (5)$$

Тогда сопротивление нагрузки R , при котором выделяется максимальная мощность

$$R = r = \frac{24 \text{ В}}{10 \text{ А}} = 2,4 \text{ Ом}.$$

Для определения максимального значения мощности P_{\max} , которая выделяется на сопротивлении нагрузки $R = r$, подставим в уравнение (3) сопротивления R и r , найденные по формулам (4) и (5):

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2 r}{(2r)^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r}; \quad \rightarrow \quad P_{\max} = \frac{\varepsilon I_{кз}}{4}.$$

Вычисляем величину $P_{\max} = \frac{24 \text{ В} \cdot 10 \text{ А}}{4} = 60 \text{ Вт}$.

Определим КПД источника тока как отношение мощностей:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{P}, \quad \text{где } P_{\text{пол}} = I^2 R; \quad P = I^2 R + I^2 r. \quad (6)$$

Здесь $P_{\text{пол}}$ – полезная мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении R ; P – мощность источника тока, развиваемая во всей цепи. После подстановки величин этих мощностей в формулу для КПД получаем следующую расчетную формулу:

$$\eta = \frac{R}{R+r}. \quad (7)$$

По этой формуле находим, что при выделении на нагрузке максимальной мощности P_{\max} величина КПД

$$\eta = \frac{r}{r+r} = \frac{1}{2}, \quad \text{или } \eta = 50\%.$$

3) С помощью формулы (7) найдем внешнее сопротивление R_1 , соответствующее заданному значению КПД $\eta_1 = 0,95$:

$$P_{\text{пол}} \qquad \eta$$

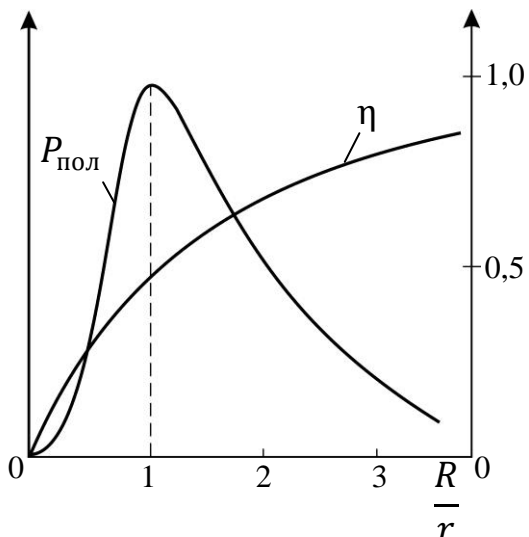


Рис. 46

$$R_1 = r \frac{\eta_1}{1 - \eta_1}.$$

Вычисляем величину сопротивления нагрузки при КПД η_1 :

$$R_1 = 2,4 \text{ Ом} \cdot \frac{0,95}{(1 - 0,95)} = 45,6 \text{ Ом}.$$

В заключение приведем примерные графики (рис. 46), которые показывают зависимости полезной мощности $P_{\text{пол}}$, выделяемой источником тока на внешнем сопротивлении R , и КПД η источника тока от отношения сопротивлений $\frac{R}{r}$.

Задача 26. Нагреватель электрического чайника имеет две секции. При включении одной из них вода в чайнике закипает за время $t_1 = 10$ мин, а при включении другой секции – через $t_2 = 30$ мин. Через какой промежуток времени t закипит вода в чайнике, если соединить обе секции: а) последовательно, б) параллельно?

Дано

$$t_1 = 10 \text{ мин};$$

$$t_2 = 30 \text{ мин}.$$

а) последовательно: $t_{\text{посл}} - ?$

б) параллельно: $t_{\text{пар}} - ?$

Решение

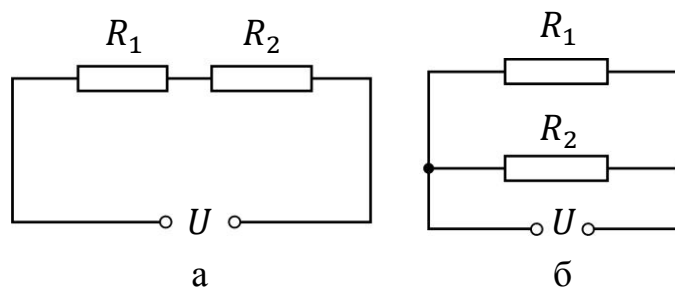


Рис. 47

Для нагревания воды в чайнике до температуры кипения требуется определенное количество теплоты Q . Это необходимое количество теплоты выделяется на сопротивлении R нагревателя при протекании в нем электрического тока I за время t и, согласно закону Джоуля – Ленца, определяется следующей формулой:

$$Q = I^2 R t. \quad (1)$$

Так как токи через сопротивления R_1 и R_2 при последовательном (рис. 47 а) и параллельном (рис. 47 б) соединении этих сопротивлений различны, а одинаковая в этих двух случаях величина напряжения, на которое подключается нагреватель, то запишем ток по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2)$$

Подставляя ток по формуле (2) в уравнение (1), получаем формулу для количества теплоты в следующем виде:

$$Q = \frac{U^2}{R} t. \quad (3)$$

Выразим из уравнения (3) время t , необходимое для сообщения чайнику с водой требуемого количества теплоты:

$$t = \frac{Q}{U^2} R. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что время нагрева t пропорционально сопротивлению нагревателя. Поэтому заданные в условии задачи величины t_1 и t_2 выразим через сопротивления каждой секции нагревателя, соответственно R_1 и R_2 , согласно формуле (4):

$$t_1 = \frac{Q}{U^2} R_1; \quad t_2 = \frac{Q}{U^2} R_2. \quad (5)$$

Из последних соотношений выразим сопротивления секций, которые будут нужны для расчета сопротивления последовательного и параллельного соединения секций:

$$R_1 = \frac{U^2}{Q} t_1; \quad R_2 = \frac{U^2}{Q} t_2. \quad (6)$$

Представим искомые времена нагрева при двух соединениях сопротивлений R_1 и R_2 формулами, аналогичными соотношениям (5):

$$t_{\text{посл}} = \frac{Q}{U^2} R_{\text{посл}}; \quad t_{\text{пар}} = \frac{Q}{U^2} R_{\text{пар}}. \quad (7)$$

Здесь $R_{\text{посл}}$ – сопротивление нагревателя при последовательном соединении секций сопротивлениями R_1 и R_2 :

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2; \quad (8)$$

$R_{\text{пар}}$ – сопротивление нагревателя при параллельном соединении сопротивлений R_1 и R_2 .

Так как

$$\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \text{то } R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (9)$$

Подставляя значения сопротивлений нагревателя, представленные формулами (8) и (9), в соотношения (7), а затем, выражая величины R_1 и R_2 через заданные времена нагрева по формулам (6), получаем следующие расчетные формулы времени нагрева в двух случаях соединения секций нагревателя:

$$t_{\text{посл}} = \frac{Q}{U^2} (R_1 + R_2) = \frac{Q}{U^2} \frac{U^2}{Q} (t_1 + t_2) = t_1 + t_2; \quad (10)$$

$$t_{\text{пар}} = \frac{Q}{U^2} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) = \frac{Q}{U^2} \frac{U^2}{Q} \left(\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} \right) = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}. \quad (11)$$

Вычисляем времена нагрева чайника при последовательном и параллельном соединениях секций по формулам (10) и (11):

$$t_{\text{посл}} = (10 + 30) \text{ мин} = 40 \text{ мин};$$

$$t_{\text{пар}} = \frac{10 \text{ мин} \cdot 30 \text{ мин}}{(10+30) \text{ мин}} = 7,5 \text{ мин}.$$

Таким образом, полученный результат показывает, что нагреватель, состоящий из двух секций с различными сопротивлениями, позволяет осуществлять нагрев с четырьмя различными скоростями.

ЧАСТЬ 3

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

7. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

7.1. Магнитное поле постоянного тока

Магнитная индукция \vec{B} и напряженность \vec{H} магнитного поля (МП) – его силовые характеристики. Связь величин \vec{B} и \vec{H} в однородной изотропной среде определяется соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость вещества: в вакууме $\mu = 1$, для воздуха и других

неферромагнитных сред $\mu \approx 1$. Равенство (1) показывает, что векторы \vec{B} и \vec{H} сонаправлены: $\vec{B} \parallel \vec{H}$.

Закон Био – Савара – Лапласа: *индукция магнитного поля $d\vec{B}$, создаваемого элементом тока $Id\vec{l}$, определяется следующей формулой:*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}; \quad (2)$$

$$\text{модуль } dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2}. \quad (3)$$

Здесь \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от элемента тока до точки, в которой определяется магнитная индукция $d\vec{B}$; $d\vec{l}$ – вектор элемента длины проводника, направление которого совпадает с направлением тока, а модуль равен бесконечно малому отрезку dl длины проводника; α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

Согласно векторной форме закона (2), вектор магнитной индукции $d\vec{B}$ лежит в плоскости, перпендикулярной векторам $d\vec{l}$ и \vec{r} . Направление его определяется с помощью правила буравчика (правого винта) следующим образом (рис. 48).

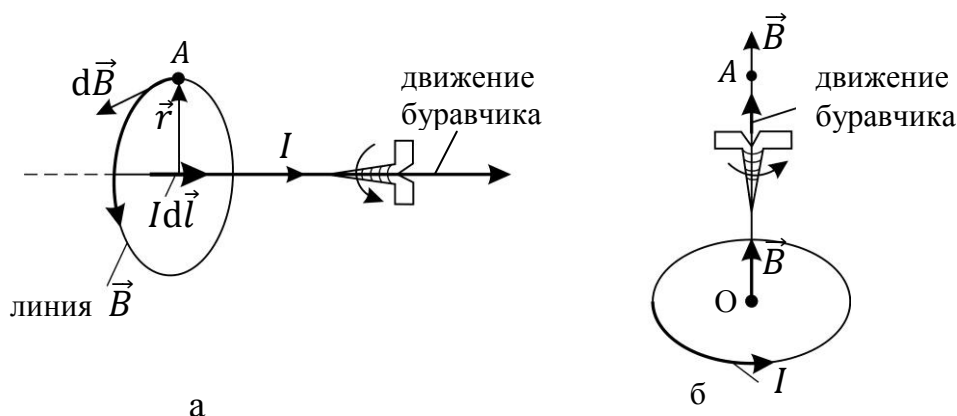


Рис. 48

а) В случае *прямого проводника с током* (см. рис. 48 а) винт располагают вдоль тока I и вращают так, чтобы *поступательное движение винта совпадало с током в проводнике*. При этом вращательное движение головки винта показывает направление линий магнитного поля \vec{B} ; эти линии МП – окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной проводнику, и охватывающие его. Вектор \vec{B} в каждой точке поля направлен по касательной к линии магнитной индукции.

б) Если магнитное поле создается *витком с током I* (см. рис. 48 б), то *по направлению тока вращают винт*, а поступательное движение винта показывает направление вектора \vec{B} в любой точке *на оси кругового тока*.

Магнитную индукцию поля, созданного проводником с током длины l , рассчитывают с помощью принципа суперпозиции:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}, \quad (4)$$

где векторы $d\vec{B}$ определяются законом Био – Савара – Лапласа (2), а суммирование векторов выполняют по всей длине проводника l .

В случае, если МП создается несколькими токами I_i или проводником, состоящим из участков конечной длины l_i , имеющих различную форму, то магнитную индукцию \vec{B} рассчитывают с помощью принципа суперпозиции в виде:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}. \quad (5)$$

Здесь \vec{B} – вектор индукции МП, созданный i -тым участком проводника, величину которого определяют по формуле (4).

Подчеркнем, что в уравнениях (4) и (5) принципа суперпозиции выполняют суммирование векторов, учитывая их направление.

На основе принципа суперпозиции (4), посредством суммирования бесконечно малых векторов, получены следующие формулы для определения величины магнитной индукции:

1) в центре кругового проводника (витка радиусом R с током I)

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}; \quad (6)$$

2) бесконечно длинного прямого проводника с током в точке, находящейся на расстоянии r_0 от проводника (по перпендикуляру)

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r_0}; \quad (7)$$

3) отрезка прямого проводника с током (рис. 49)

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (8)$$

Здесь угол α_1 – между первым элементом тока $Id\vec{l}_1$ (отсчет ведется по направлению тока) и радиус-вектором \vec{r}_1 , проведенным от него в точку, где определяют магнитную индукцию \vec{B} ; α_2 – угол между последним элементом тока $Id\vec{l}_2$ отрезка проводника и радиус-вектором \vec{r}_2 , задающим положение точки магнитного поля относительно этого элемента тока.

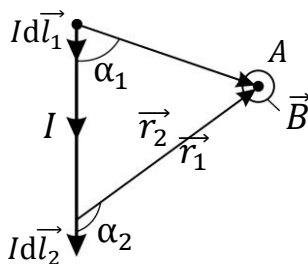


Рис. 49

Магнитная индукция поля *внутри соленоида* (катушки с током) (рис. 50 а) вдали от его торцов

$$B = \mu_0 \mu \frac{NI}{l} = \mu_0 \mu nI, \quad (9)$$

где N – число витков соленоида; I – ток в его обмотке; l – длина сердечника, на котором располагаются витки, n – число витков на единице длины обмотки соленоида.

Магнитная индукция поля *тороида* (витки катушки намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис. 50 б)) внутри тора определяется также формулой (9), где l – длина осевой линии тора: $l = 2\pi r$; вне тора $B = 0$.

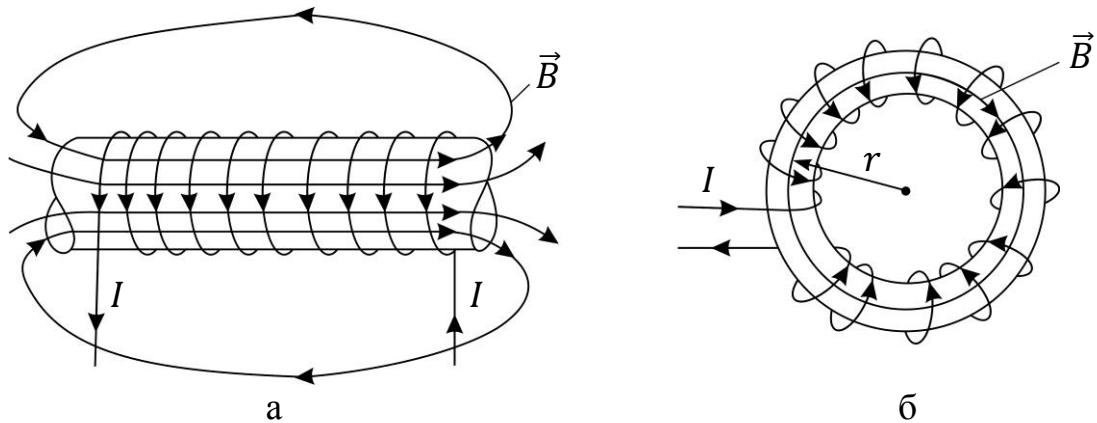


Рис. 50

7.2. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле

Сила $d\vec{F}$, действующая на элемент тока проводника $I d\vec{l}$ в магнитном поле с индукцией \vec{B} , описывается законом Ампера:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (10)$$

Здесь модуль силы Ампера

$$dF = I dl B \sin\alpha,$$

где α – угол между вектором элемента длины $d\vec{l}$ и вектором магнитной индукции \vec{B} .

Силу Ампера, действующую на проводник длины l , определяют с помощью принципа суперпозиции, суммируя векторы сил, действующих на каждый элемент длины проводника:

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F}, \quad (11)$$

где величина силы $d\vec{F}$ определяется уравнением (10).

Контур с током характеризуют *магнитным моментом* \vec{p}_m :

$$\vec{p}_m = \vec{n} IS. \quad (12)$$

Здесь \vec{n} – единичная нормаль к плоскости контура; её направление и направление вектора магнитного момента $\vec{p}_m \parallel \vec{n}$ связано с направлением тока правилом буравчика (см. п. 7.1); S – площадь, охватываемая контуром.

В магнитном поле силы Ампера $d\vec{F}$, действующие на каждый элемент тока контура, создают механический (вращающий) момент \vec{M} , величина которого в однородном поле с магнитной индукцией \vec{B} определяется формулой

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}, \quad (13)$$

где \vec{p}_m – магнитный момент контура с током.

Модуль вращающего момента

$$M = p_m B \sin\alpha, \quad (14)$$

где α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

7.3. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

Сила Лоренца \vec{F}_L действует на заряженную частицу с зарядом Q , движущуюся со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} , и описывается следующей формулой:

$$\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B}; \quad \text{ее модуль } F_L = |Q|vB\sin\alpha, \quad (15)$$

где α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

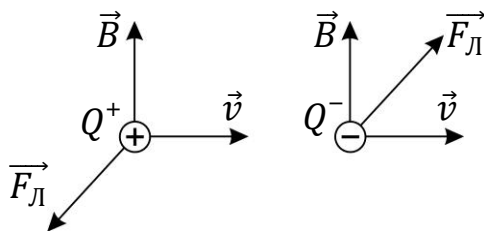


Рис. 51

Направление силы Лоренца: $\vec{F}_L(\vec{v}$ и $\vec{B})$, – определяют по правилу левой руки или по правилу векторного произведения, равного $\vec{v} \times \vec{B}$ (правило буравчика) (рис. 51). Знак заряда влияет на направление силы, действующей на заряженную частицу (см. рис. 51).

При движении заряженной частицы в двух полях: в электрическом и магнитном поочередно (сначала в электрическом, а затем в МП) или в совмещенных полях, на частицу действуют две силы – электрическая сила и магнитная:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{эл}} + \vec{F}_{\text{магн}}, \quad \text{или } \vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (16)$$

Электрическая сила оказывает ускоряющее (или тормозящее) действие, а также отклоняющее действие, если скорость частицы \vec{v} не параллельна линиям напряженности \vec{E} электрического поля. Сила Лоренца вызывает только отклонение частицы от прямолинейного движения, так как $\vec{F}_L \perp \vec{v}$ и создает только нормальное ускорение; при этом тангенциальное ускорение равно нулю и, следовательно, модуль скорости частицы не изменяется: $v = \text{const}$.

Форма траектории движения заряженной частицы в однородном магнитном поле зависит от угла α в формуле (15) – угла между скоростью заряженной частицы \vec{v} и магнитной индукцией \vec{B} .

- 1) При движении частицы со скоростью \vec{v} , параллельной вектору магнитной индукции \vec{B} ($\alpha = 0$ или π) сила Лоренца, согласно формуле (15), равна нулю и частица движется по прямой вдоль линий магнитной индукции (рис. 52).

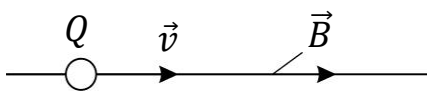
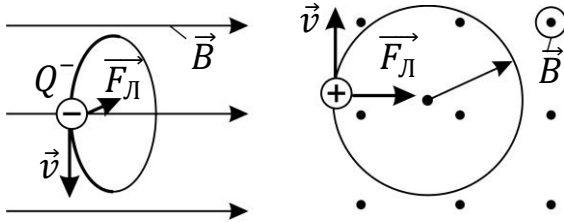


Рис. 52

2) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ сила Лоренца $F_L = QvB$. Эта сила, перпендикулярная скорости, создает нормальное, или центростремительное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$. Согласно второму закону Ньютона $F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R}$. Так как сила



$F_n \equiv F_L$, то, приравнявая формулы сил, найдем радиус кривизны траектории:

$$R = \frac{v}{\left(\frac{Q}{m}\right)B}. \quad (17)$$

Здесь $\frac{Q}{m}$ – удельный заряд частицы. В однородном

поле, согласно формуле (17), величина R постоянна при движении частицы, что соответствует движению по окружности (рис. 53).

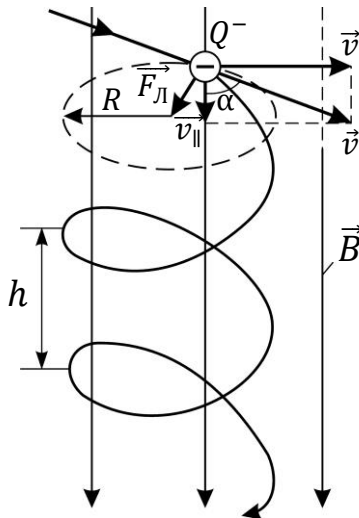


Рис. 54

3) В случае, если угол $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, траекторией частицы является винтовая линия (спираль), ось которой параллельна линиям \vec{B} магнитного поля (рис. 54). Движение по этой траектории является наложением двух независимых движений: равномерного движения со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ по прямой вдоль линий \vec{B} , и равномерного движения со скоростью $v_{\perp} = v \sin \alpha$ по окружности в плоскости, перпендикулярной линиям \vec{B} . Радиус этой окружности определяется формулой (17), в которой скорость частицы v следует заменить величиной v_{\perp} . Шаг винтовой

линии h определяем следующим образом:

$$h = v_{\parallel}T = v \cos \alpha \cdot T, \quad (18)$$

где T – период обращения частицы (время, за которое она совершает один оборот) определяется формулой

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi}{\left(\frac{Q}{m}\right)v_{\perp}B}. \quad (19)$$

Если заряженная частица влетает со скоростью \vec{v} , которая направлена перпендикулярно скрещенным под прямым углом электрическому и магнитному полям, то частица испытывает отклоняющее действие. Но при определенной скорости частицы она может двигаться в этих полях равномерно и прямолинейно (см. задачу 42). Такое движение реализуется

Q^-

в фильтре скоростей ионов масс-спектрометра, который предназначен для выделения из ионного пучка частиц с определенной скоростью.

7.4. Магнитный поток. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Магнитный поток $d\Phi_B$ – это поток вектора магнитной индукции \vec{B} через площадку dS :

$$d\Phi_B = B_n dS = B \cos \alpha dS,$$

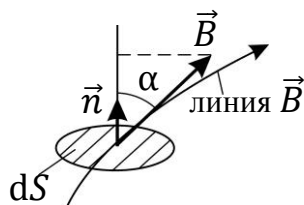


Рис. 55

где B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль к площадке; α – угол между магнитной индукцией \vec{B} и нормалью \vec{n} к площадке dS (рис. 55). Далее в обозначении магнитного потока индекс будет опущен, т.е. $d\Phi_B \equiv d\Phi$. Магнитный поток через площадь S равен сумме элементарных потоков $d\Phi$:

$$\Phi = \int_S B_n dS. \quad (20)$$

Для однородного поля и плоской поверхности S (для нее B_n одинакова на всей площади) формула (20) принимает следующий вид:

$$\Phi = B_n S.$$

В случае соленоида и тороида различают 1) магнитный поток сквозь площадь одного витка (или в сечении катушки): $\Phi_1 = BS$, так как проекция на нормаль $B_n = B$; и 2) полный магнитный поток Ψ , сцепленный со всеми витками, или *потокосцепление*:

$$\Psi = N \cdot \Phi_1 = NBS, \quad (21)$$

где N – число витков катушки с током.

Работа сил Ампера при перемещении проводника с током в магнитном поле, как механическая работа, равна скалярному произведению векторов силы и перемещения:

а) элементарная работа $dA = F_x dx$;

б) работа на конечном перемещении от точки 1 до точки 2 равна сумме элементарных работ

$$A = \int_1^2 F_x dx, \quad (22)$$

где F_x – проекция на направление перемещения dx силы Ампера $F = IBl$, которая действует на проводник с током I длиной l в *однородном магнитном поле* с индукцией B .

Формулы работы при движении контура с током преобразуются к следующему виду:

$$dA = Id\Phi; \quad A = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (23)$$

Здесь I – ток в проводнике; Φ_2 и Φ_1 – магнитный поток, соответственно, в конечном положении контура (индекс 2) и в начальном (индекс 1).

При перемещении прямого проводника с током I в магнитном поле $A = I\phi$, где ϕ – магнитный поток через площадь S , которую описывает проводник при движении.

Заметим, что формула (23) справедлива как в однородном, так и в неоднородном МП при любом движении контура: и поступательном, и вращательном.

7.5. Явление электромагнитной индукции. Индуктивность цепи. Энергия магнитного поля

Основной закон электромагнитной индукции (ЭМИ) – закон Фарадея: электродвижущая сила индукции \mathcal{E}_i равна скорости изменения магнитного потока сквозь площадь контура:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt}. \quad (24)$$

В каждой витке обмотки соленоида или тороида возникает ЭДС индукции, равная \mathcal{E}_{i1} ; так как витки одинаковы и соединены последовательно, то ЭДС индукции, возникающая в катушке, равна сумме ЭДС N витков:

$$\mathcal{E}_i = N\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d}{dt}(N\phi) = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (25)$$

где Ψ – потокосцепление контура.

Частные случаи применения закона электромагнитной индукции (25):

1) при поступательном движении проводника длиной l

$$\mathcal{E}_i = Bvl \sin \alpha, \quad (26)$$

где α – угол между векторами скорости проводника \vec{v} и магнитной индукции \vec{B} ;

2) при вращении рамки в однородном МП с индукцией \vec{B}

$$\mathcal{E}_i = NBS\omega \sin \omega t. \quad (27)$$

Здесь N – число витков рамки; S – площадь витка; ω – угловая скорость вращения; $\varphi = \omega t$ – угол поворота нормали рамки \vec{n} в момент времени t (при $t = 0$ вектор $\vec{n} \uparrow \vec{B}$).

Количество электричества Q , протекающее через сечение проводника сопротивлением R при изменении потокосцепления $\Delta\Psi$, определяется формулой

$$Q = \frac{\Delta\Psi}{R}, \quad \text{или} \quad Q = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{R}, \quad (28)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 – потокосцепления контура в начальном и конечном положениях.

Заметим, что при решении задач контрольной работы №4 формулы (26), (27) и (28) следует выводить, исходя из основного закона ЭМИ (25).

Полный магнитный поток ψ контура пропорционален току I в этом контуре:

$$\psi = LI, \quad (29)$$

где L – коэффициент пропорциональности, называемый *индуктивностью контура*. Индуктивность длинного соленоида и тороида определяется формулой

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (30)$$

Здесь μ – магнитная проницаемость сердечника; N – число витков катушки; S – площадь поперечного сечения сердечника (площадь витка); l – длина сердечника; $n = \frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины соленоида; V – объем сердечника.

ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s , возникающая в контуре при изменении в нем тока, в случае постоянной индуктивности контура ($L = \text{const}$, если сердечник катушки неферромагнитный) изменяется по закону:

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (31)$$

ЭДС самоиндукции, согласно правилу Ленца, препятствует изменению тока в цепи (его снижению при размыкании цепи и увеличению – при замыкании). В результате действия ЭДС самоиндукции ток в цепи с течением времени изменяется плавно (рис. 56).

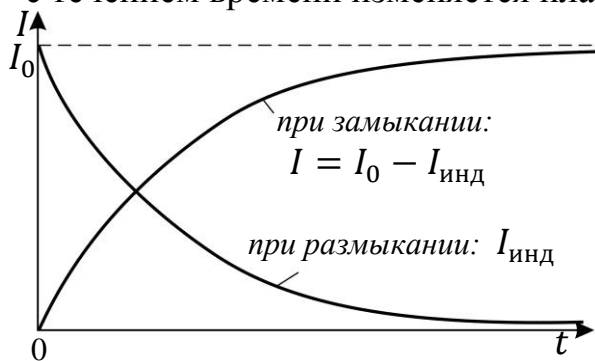


Рис. 56

После размыкания цепи, имеющей активное сопротивление R и индуктивность L , ток изменяется с течением времени t по следующему закону:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (32)$$

где I_0 – ток в момент времени $t = 0$.

Ток, определяемый формулой (32), является индукционным;

в соответствии с законом Ома, величина этого тока в любой момент времени t : $I = \frac{\mathcal{E}_s}{R}$, где ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s определяется законом ЭМИ (31).

При подключении цепи к источнику тока ЭДС самоиндукции создает индукционный ток, препятствующий нарастанию тока до значения I_0 . В результате ток в цепи устанавливается с течением времени по закону

$$I = I_0 - I_{\text{инд}} = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (33)$$

Здесь, согласно закону Ома, ток $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$, где \mathcal{E} – ЭДС источника тока.

Энергия W магнитного поля, которое создается током I в контуре с индуктивностью L , вычисляется по следующей формуле:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (34)$$

Объемная плотность энергии однородного МП ($w = \frac{W}{V}$) с магнитной индукцией B , например, в сердечнике длинного соленоида, определяется формулой

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}, \quad (35)$$

где μ – магнитная проницаемость сердечника.

7.6. Магнитное поле в веществе

Вещество во внешнем магнитном поле с индукцией \vec{B}_0 намагничивается и создает собственное МП с индукцией \vec{B}' . Результирующее магнитное поле является суперпозицией этих двух полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (36)$$

Индукция собственного магнитного поля магнетика

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{j}, \quad (37)$$

где \vec{j} – намагниченность вещества, она равна сумме магнитных моментов молекул вещества, находящихся в единичном объеме магнетика ($V = 1 \text{ м}^3$)

$$\vec{j} = \frac{\sum \vec{p}_m^{\text{мол}}}{V}. \quad (38)$$

Величина намагниченности \vec{j} зависит от природы магнетика и напряженности МП \vec{H} следующим образом:

$$\vec{j} = \chi \vec{H}, \quad (39)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества. С учетом этих соотношений принцип суперпозиции (36) запишем в следующем виде:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (40)$$

Здесь $\mu = (1 + \chi)$ – магнитная проницаемость вещества.

По соотношению индукции МП в вакууме и собственного магнитного поля различают 3 вида магнетиков:

- 1) *диамагнетики* (медь, графит, вода и др.): $\chi \leq 0$; $\mu \leq 1$;
- 2) *парамагнетики* (алюминий, платина и др.): $\chi \geq 0$; $\mu \geq 1$;

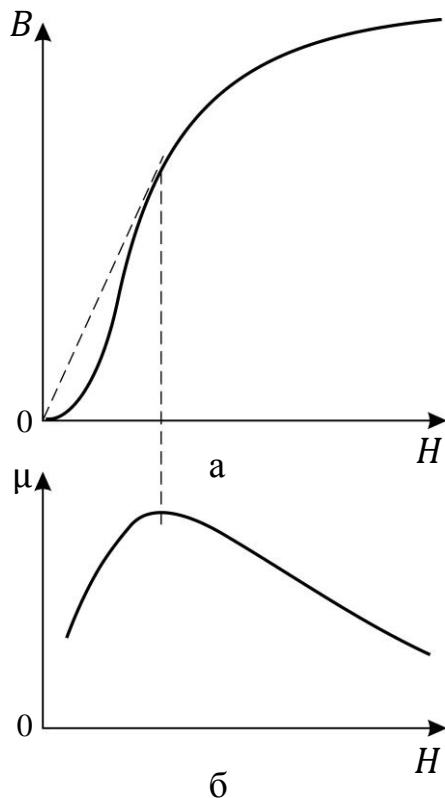


Рис. 57

диа- и парамагнетики относят к слабым магнетикам, так как их собственное поле мало: $B' \ll B_0$;

3) *ферромагнетики* – сильные магнетики, так как их собственное поле $B' \gg B_0$, а величина магнитной проницаемости μ достигает $10^2 \dots 10^6$; ферромагнетиками являются железо, кобальт, никель, их сплавы с другими металлами и др.

Для ферромагнетиков характерна нелинейная кривая намагничивания: зависимость $B = f(H)$, показанная на рис. 57 а, и зависимость магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля: $\mu = f(H)$ (рис. 57 б). Если ферромагнетик намагнитить до насыщения, а затем уменьшать напряженность H намагничивающего поля, то кривая $B(H)$ пойдет выше и при $H = 0$ будет величина $B = B_{\text{ост}}$: остаточная намагниченность.

8. РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛУ «ЭЛЕКТОМАГНЕТИЗМ»

1. Внимательно прочитайте условие задачи. Выясните, какое явление рассматривается в задаче, и изучите сведения о нем и о физических величинах, его описывающих, по разделу «7. Теоретическая часть».

2. При определении магнитных сил, магнитного потока и других величин обратите внимание на то, какое магнитное поле рассматривается в задаче – однородное или неоднородное. В первом случае используйте более простые формулы для однородного МП.

3. При решении задачи определяйте направления искомых векторов $d\vec{B}$, \vec{B} , $d\vec{F}_A$, \vec{F}_A , \vec{F}_L и др. Для этого используйте а) определительные формулы, в правой части которых записано векторное произведение векторов или б) правило буравчика (см. п. 7.1) и правило левой руки.

4. В том случае, если магнитное поле создается в ферромагнетике, для которого магнитная проницаемость $\mu \gg 1$ (в отличие от картонного или воздушного сердечника, имеющего $\mu \approx 1$), необходимо определять величину μ по формуле, связывающей напряженность H и магнитную индукцию B :

$$B = \mu_0 \mu H; \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{B}{\mu_0 H}. \quad (41)$$

При этом следует учесть, что величина магнитной индукции зависит от напряженности МП: $B = f(H)$, – и соответственно $\mu = f(H)$. Поэтому сначала вычисляют напряженность магнитного поля H , которая зависит только от тока в контуре и формы и размеров контура (катушки). Затем *по экспериментальному графику кривой намагничивания* $B = f(H)$ для заданного материала сердечника (используя справочные данные) по рассчитанной величине H определяют индукцию магнитного поля B . По найденным значениям B и H вычисляют магнитную проницаемость сердечника μ по формуле (41).

9. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9.1. Магнитное поле постоянного тока

План решения задач

1. В тех задачах, где магнитное поле создается током, текущим в проводнике сложной формы, проводник мысленно разбивают на отрезки (прямые или участки кругового контура), для которых известны расчетные формулы магнитной индукции. Затем записывают принцип суперпозиции магнитных полей в виде:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i, \quad (1)$$

где \vec{B}_i – индукция магнитного поля отдельных i -тых отрезков проводника. По формуле (1) определяют также результирующее поле, созданное двумя и более длинными прямыми проводами или витками с током.

2. Для расчета магнитной индукции \vec{B} *кругового тока* в его центре или в точке на оси витка принцип суперпозиции записывают в следующем виде:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}. \quad (2)$$

Здесь интегрирование выполняют по всей длине l проводника с током. Вектор $d\vec{B}$ определяют по закону Био – Савара – Лапласа. При сложении бесконечно малых векторов $d\vec{B}$ возможны два варианта: 1) векторы $d\vec{B}$ сонаправлены, т. е. направлены по одной прямой; в этом случае модуль $B = \int_l dB$ (суммируют модули dB); 2) если векторы $d\vec{B}$ не сонаправлены, то каждый из них необходимо разложить на два взаимно перпендикулярных вектора:

$$d\vec{B} = d\vec{B}_{\parallel} + d\vec{B}_{\perp}, \quad (3)$$

где $d\vec{B}_{\parallel}$ – вектор, параллельный оси витка с током; $d\vec{B}_{\perp}$ – составляющая вектора $d\vec{B}$, перпендикулярная оси витка.

3. В уравнениях (1) и (2) принципа суперпозиции записана сумма векторов. Для сложения векторов необходимо определить их направления и показать векторы на рисунке. Так как линии магнитного поля токов представляют собой окружности, замкнутые вокруг токов и даже вокруг

бесконечно малых элементов тока $I d\vec{l}$, то используем правило буравчика, располагая винт вдоль тока. Если проводник с током размещен в плоскости рисунка, то в точках, находящихся в этой плоскости, вектор \vec{B} будет направлен перпендикулярно плоскости рисунка. Такой вектор обозначают значком \otimes , если вектор направлен «от нас», или значком \odot , если вектор направлен «к нам».

Задача 27. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см течет ток $I = 50$ А. Определите магнитную индукцию \vec{B} в точке A на оси кольца, равноудаленной от точек кольца на расстояние $r = 20$ см.

Дано

$$R = 0,10 \text{ м};$$

$$I = 50 \text{ А};$$

$$r = 0,20 \text{ м}.$$

$$\vec{B} - ?$$

Решение

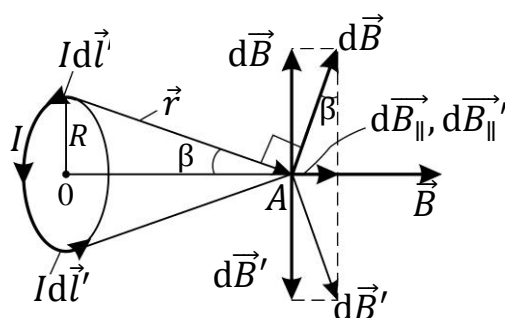


Рис. 58

Мысленно разделим кольцо с током на элементы тока $I d\vec{l}$, каждый из которых создает в точке A магнитное поле с индукцией $d\vec{B}$, и сложим эти поля от элементов тока, согласно принципу суперпозиции:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}. \quad (1)$$

Здесь интегрирование выполняют по всей длине кольца l , а вектор $d\vec{B}$ определяется законом Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (2)$$

Из уравнения (2), в соответствии с векторным произведением векторов, следует, что вектор $d\vec{B}$ перпендикулярен векторам $d\vec{l}$ и \vec{r} . На рис. 58 плоскость кольца и элемент тока $I d\vec{l}$ перпендикулярны плоскости рисунка. Следовательно, вектор $d\vec{B}$ будет расположен в плоскости рисунка, где его проводим перпендикулярно радиус-вектору \vec{r} , проведенному от элемента тока к точке A . Выделим другой элемент тока $I d\vec{l}'$, диаметрально противоположный элементу $I d\vec{l}$, и покажем создаваемый им вектор магнитной индукции $d\vec{B}'$ на рис. 58. Нетрудно заметить, что векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока кольца образуют конус векторов.

Для сложения векторов $d\vec{B}$, направленных по образующим конуса, разложим каждый вектор на две составляющие:

$$d\vec{B} = d\vec{B}_{\parallel} + d\vec{B}, \quad (3)$$

где $d\vec{B}_{\parallel}$ – вектор, параллельный оси кольца ОА; $d\vec{B}$ – составляющая вектора $d\vec{B}$, перпендикулярная оси кольца. После подстановки разложения (3) в уравнение (1) принципа суперпозиции интеграл в правой части представится суммой двух интегралов:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}_{\parallel} + \int_l d\vec{B}. \quad (4)$$

Второй интеграл: $\int_l d\vec{B} = 0$, так как сумма векторов $(d\vec{B} + d\vec{B}^i) = 0$ и таким образом все векторы попарно компенсируются. Тогда в уравнении (4) остается один интеграл:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}_{\parallel}, \quad (5)$$

где все векторы $d\vec{B}_{\parallel}$ сонаправлены, следовательно, в точке А вектор магнитной индукции $\vec{B} \uparrow d\vec{B}_{\parallel}$ (см. рис. 58), и его модуль

$$B = \int_l dB_{\parallel}, \quad (6)$$

Здесь составляющая $dB_{\parallel} = dB \sin \beta$, где $\sin \beta = \frac{R}{r}$ (см. треугольники на рис. 58). Модуль dB находим с помощью закона Био – Савара – Лапласа (2): так как вектор $\vec{r} \perp d\vec{l}$, то $\sin \alpha = 1$ и величина магнитной индукции

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}. \quad (7)$$

Подставим величину dB_{\parallel} в интеграл (6) и вычислим его:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin \beta}{r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 \mu IR}{4\pi r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 \mu 2I \cdot \pi R^2}{4\pi r^3}. \quad (8)$$

Учтем, что $I \cdot \pi R^2 = IS = p_m$ – магнитный момент контура с током, и формулу (8) представим в виде

$$B = \frac{\mu_0 \mu 2p_m}{4\pi r^3}. \quad (9)$$

Вычисляем магнитную индукцию B поля в точке А по формуле (8), полагая, что для воздуха магнитная проницаемость $\mu \approx 1$, а магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}}$.

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}} \cdot 1}{4\pi} \frac{2 \cdot 50 \text{ А} \cdot 3,14 \cdot 0,1^2 \text{ м}^2}{0,2^3 \text{ м}^3} = 3,9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = 39 \text{ мкТл}.$$

Задача 28. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи $I_1 = I$ и $I_2 = 2I$ одного направления. Расстояние между проводами $l = 0,3$ м. Для линии АС, перпендикулярной проводам, определите, на каком участке: 1, 2 или 3 (рис. 59 а), – находится точка,

в которой индукция магнитного поля $B = 0$. На каком расстоянии a от первого провода находится эта точка?

Дано

$$I_1 = I;$$

$$I_2 = 2I;$$

$$l = 0,3 \text{ м.}$$

$$1) B = 0$$

на каком участке?

$$2) a - ?$$

Решение

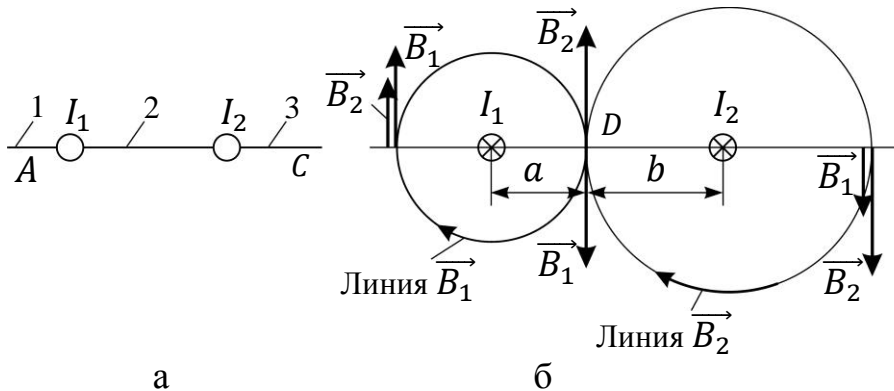


Рис. 59

Индукция магнитного поля в любой точке прямой AC определяется по принципу суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad (1)$$

где \vec{B}_1 – магнитная индукция поля, созданного первым проводом с током I_1 ; \vec{B}_2 – та же величина, созданная вторым проводом с током I_2 .

Так как в уравнении (1) записана геометрическая сумма векторов \vec{B}_1 и \vec{B}_2 , то определим их направления. Эти векторы направлены по касательным к линиям магнитной индукции, которые имеют форму окружностей с центрами на соответствующем проводе. Направление линий определяем по вращению головки буравчика (правого винта), который должен перемещаться по направлению тока. На рис. 59 б токи текут «от нас», поэтому буравчик следует вращать по часовой стрелке, чтобы винт вворачивался.

В каждой области (1, 2 и 3) показываем направление векторов \vec{B}_1 и \vec{B}_2 , касательных к соответствующим окружностям. На участках 1 и 3 вектор $\vec{B}_1 \uparrow \vec{B}_2$, и сумма таких векторов отлична от нуля. На втором участке линии AC , который находится между проводами, вектор $\vec{B}_1 \downarrow \vec{B}_2$ (см. рис. 59 б). Принимая за положительное направление вектора \vec{B}_1 , запишем для этого участка принцип суперпозиции (1) в следующем виде:

$$B = B_1 - B_2. \quad (2)$$

Здесь модули магнитной индукции длинных прямых проводов определяем по формулам

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi b}. \quad (3)$$

Подставляем эти значения B_1 и B_2 в уравнение (2) и, согласно условию задачи, приравняем нулю индукцию результирующего магнитного поля:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I_1}{a} - \frac{I_2}{b} \right) = 0; \rightarrow \frac{I}{a} = \frac{2I}{b}; \rightarrow \frac{b}{a} = 2. \quad (4)$$

Учитывая, что $a + b = l$, из соотношения (4) определяем величину a :

$$\frac{l-a}{a} = 2; \rightarrow l = 3a; \rightarrow a = \frac{l}{3} = 0,1 \text{ м.}$$

Таким образом, точка D , в которой модули векторов одинаковы: $B_1 = B_2$, а их сумма равна нулю, находится на отрезке прямой между проводами, ближе к первому проводу, – с меньшим током, так как величина $B \sim \frac{I}{r}$.

Задача 29. По двум бесконечно длинным прямым проводам, скрещенным под прямым углом, текут токи $I_1 = I$ и $I_2 = 3I$, где $I = 100 \text{ А}$. Определите магнитную индукцию \vec{B} в точке A (рис. 60 а), если расстояние $d = 10 \text{ см}$.

Дано

$$\begin{aligned} I_1 &= I; \\ I_2 &= 3I; \\ I &= 100 \text{ А}; \\ d &= 0,10 \text{ м.} \\ \vec{B} &- ? \end{aligned}$$

Решение

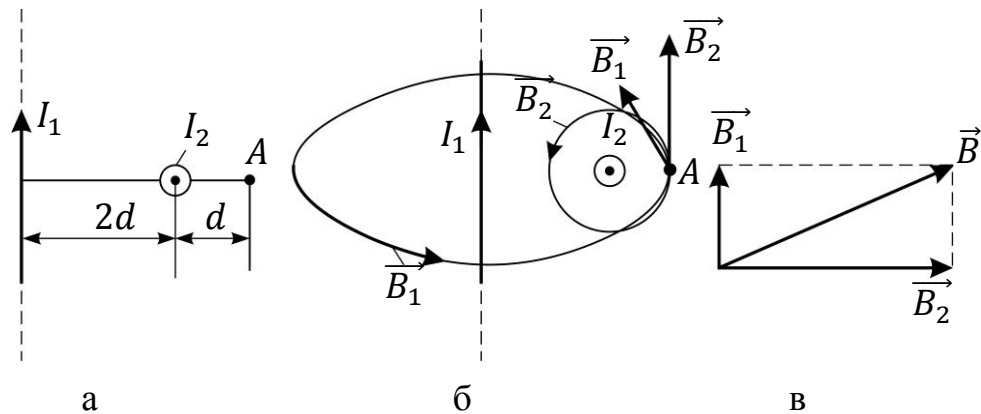


Рис. 60

Магнитное поле, созданное двумя проводами с током, в любой точке пространства определяется по принципу суперпозиции как геометрическая сумма векторов:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad (1)$$

где \vec{B}_1 и \vec{B}_2 – величины индукции магнитного поля, созданного первым проводом с током I_1 и вторым – с током I_2 .

Векторы \vec{B}_1 и \vec{B}_2 направляем по касательным к линиям магнитной индукции. Эти линии – окружности с центрами на проводах с током, а направление линий (рис. 60 б) определяем по правилу буравчика (см. п. 7.1) Так как векторы \vec{B}_1 и \vec{B}_2 взаимно перпендикулярны (рис. 60 в), то модуль магнитной индукции B результирующего поля определяем с помощью теоремы Пифагора:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}. \quad (2)$$

Модуль магнитной индукции поля, созданного длинным прямым проводником с током I , рассчитывается по следующей формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (3)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды, для воздуха $\mu \approx 1$; r – расстояние от провода до точки A , в которой определяем магнитную индукцию. Для первого и второго провода соответственно по формуле (3) запишем

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \cdot 3d}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}. \quad (4)$$

Подставляя эти величины B_1 и B_2 в выражение (2), получаем расчетную формулу для индукции магнитного поля в точке A :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \sqrt{\left(\frac{3}{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{2\pi d}. \quad (5)$$

Вычисляем значение магнитной индукции поля в точке A :

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 1,41 \cdot 100 \text{ А}}{2\pi \cdot 0,1 \text{ м}} = 2,8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = 0,28 \text{ мТл}.$$

Задача 30. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам текут токи $I_1 = 30 \text{ А}$ и $I_2 = 50 \text{ А}$. Определите магнитную индукцию \vec{B} поля в точке A (рис. 61 а), равноудаленной от проводов на расстояние $d = 5 \text{ см}$; угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Дано

$$I_1 = 30 \text{ А};$$

$$I_2 = 50 \text{ А};$$

$$d = 5 \text{ см};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$\vec{B} - ?$$

Решение

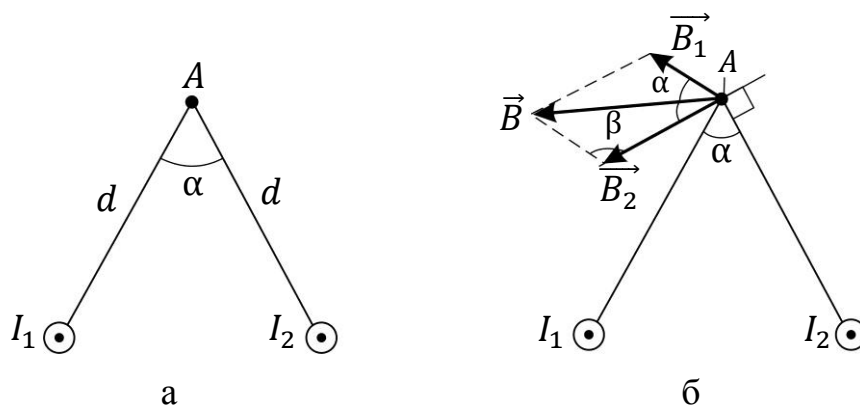


Рис. 61

Так как магнитное поле создается двумя проводниками с током, то магнитную индукцию поля в точке A определяем по принципу суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad (1)$$

где \vec{B}_1 – индукция МП, созданная в точке A первым проводником с током I_1 ; \vec{B}_2 – та же величина, созданная вторым проводником с током I_2 .

Для сложения векторов \vec{B}_1 и \vec{B}_2 необходимо показать их на рисунке. Эти векторы идут по касательным к линиям магнитной индукции, которые представляют собой окружности радиусом d , охватывающие первый и второй проводники. Касательные проводим перпендикулярно радиусу d соответствующей окружности (рис. 61 б).

Результирующий вектор \vec{B} , согласно принципу суперпозиции (1), находим по правилу параллелограмма (треугольника). Модуль его определяем по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2 \cos \beta}, \quad (2)$$

где угол $\beta = \pi - \alpha = \frac{2}{3}\pi$ (так как $(\alpha + \beta) = \pi$, (см. рис. 61 б)). Модули магнитной индукции поля, созданного первым и вторым проводниками, определяются формулами:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}. \quad (3)$$

Здесь магнитная проницаемость воздуха $\mu \approx 1$.

Подставляем эти величины B_1 и B_2 в уравнение (2) и получаем расчетную формулу индукции МП в точке A в следующем виде:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \sin \frac{\pi}{6}}; \quad \text{так как } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6}.$$

Вычисляем величину магнитной индукции поля в точке A :

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}}{2\pi \cdot 0,05 \text{ м}} \sqrt{\left(30^2 + 50^2 + 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2}\right) \text{ А}^2} = 2,8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = 0,28 \text{ мТл}.$$

Задача 31. По бесконечно длинному проводнику, изогнутому так, как показано на рис. 62 а, течет ток $I = 100$ А. Радиус дуги $R = 5$ см. Определите магнитную индукцию \vec{B} в точке O .

Дано

$$I = 100 \text{ А};$$

$$R = 5 \text{ см}.$$

$$\vec{B} - ?$$

Решение

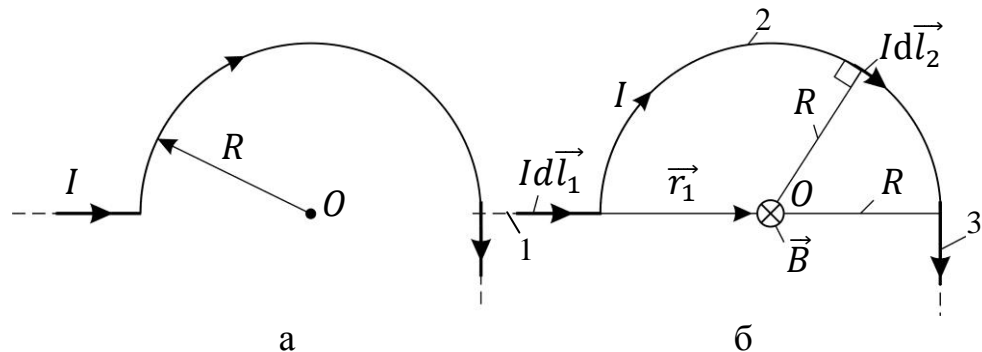


Рис. 62

Провод заданной формы разделим на три участка (рис. 62 б): длинные прямые проводники 1 и 3 и дуга 2, равная половине окружности. Индукцию \vec{B} магнитного поля, созданного проводником, состоящим из таких участков, найдем по принципу суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3. \quad (1)$$

Вычислим вектор \vec{B}_1 от первого участка проводника, суммируя бесконечно малые значения $d\vec{B}_1$, создаваемые элементами тока Idl_1 :

$$\vec{B}_1 = \int_l d\vec{B}_1, \quad (2)$$

где вектор $d\vec{B}_1$ определяем по закону Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Id\vec{l}_1 \times \vec{r}_1}{r_1^3}. \quad (3)$$

В формуле закона (3) элемент длины $d\vec{l}_1$ первого участка провода и радиус-вектор \vec{r}_1 , проведенный от элемента тока к точке O , сонаправлены, т. е. $d\vec{l}_1 \parallel \vec{r}_1$, а в этом случае векторное произведение $d\vec{l}_1 \times \vec{r}_1 = 0$ (так как $\sin 0 = 0$). Следовательно, каждый $d\vec{B}_1 = 0$ и их сумма $\vec{B}_1 = 0$. Отметим полученный результат: *в любой точке, находящейся на продолжении прямого провода с током, индукция МП, созданная этим проводом, равна нулю.*

Вычислим вектор \vec{B}_2 , аналогично предыдущему расчету, суммируя бесконечно малые значения $d\vec{B}_2$, создаваемые элементами тока $Id\vec{l}_2$:

$$\vec{B}_2 = \int_l d\vec{B}_2. \quad (4)$$

Для определения направления складываемых векторов $d\vec{B}_2$ применяем правило буравчика: вращая головку винта по направлению тока в полукольце, по движению винта (который будет ввинчиваться) получаем, что вектор $d\vec{B}_2$ от любого элемента тока дуги направлен перпендикулярно плоскости рисунка «от нас». Следовательно, и вектор \vec{B}_2 имеет такое же направление. Так как все векторы $d\vec{B}_2$ сонаправлены, то суммируем их модули:

$$B_2 = \int_l dB_2 = \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl_2 R \sin 90^\circ}{R^3} = \frac{\mu_0 \mu I}{4R}. \quad (5)$$

Отметим, что найденная величина $B_2 = \frac{1}{2} B_{\text{кольца}}$ (см. п. 7.1, формула (6)). Этот результат имеет простое объяснение: отсутствующая половина кольца создавала бы такое же поле B_2 , а согласно принципу суперпозиции $B_{\text{кольца}} = B_2 + B_2 = 2B_2$. Следовательно, расчет B_2 выполнен верно.

Определяем вектор \vec{B}_3 : его направление находим по правилу буравчика, вращая головку винта по часовой стрелке (если смотреть на начало третьего участка сверху), чтобы винт вворачивался по направлению тока (вниз). Тогда вектор \vec{B}_3 , касательный к окружности, которую описывает головка винта, будет направлен перпендикулярно плоскости рисунка «от нас». Таким образом, вектор $\vec{B}_3 \parallel \vec{B}_2$; складывая эти векторы, по принципу суперпозиции (1) получаем, что результирующий вектор \vec{B} сонаправлен с векторами \vec{B}_2 и \vec{B}_3 , т. е. также направлен перпендикулярно плоскости рисунка «от нас». Модуль вектора \vec{B} , в соответствии с уравнением (1), равен сумме модулей сонаправленных векторов:

$$B = B_2 + B_3. \quad (6)$$

Найдем модуль вектора \vec{B}_3 . Заметим, что если мысленно продолжить участок провода 3 вверх до бесконечности, т. е. дополнить его проводом, равным участку 3, то получим бесконечно длинный прямой провод, создающий поле с магнитной индукцией

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R}. \quad (7)$$

С учетом равного вклада двух половин провода, следуя принципу суперпозиции, запишем уравнение:

$$\vec{B} = \vec{B}_3 + \vec{B}_3 = 2\vec{B}_3; \quad \rightarrow \quad B_3 = \frac{1}{2}B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R}. \quad (8)$$

Заметим, что результат (8) можно получить и из формулы магнитной индукции отрезка прямого проводника с током (п. 7.1, формула (8)):

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (9)$$

где r_0 – расстояние от провода до точки, в которой определяем величину B : $r_0 = R$; углы $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_2 \rightarrow \pi$, т. е. $\cos \alpha_1 = 0$; $(-\cos \alpha_2) = 1$.

Подставляя найденные величины магнитной индукции второго и третьего участков провода (формулы (5) и (8)) в уравнение (6) принципа суперпозиции, получаем расчетную формулу индукции магнитного поля в точке O :

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4R} + \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R}; \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} (\pi + 1). \quad (10)$$

Вычисляем магнитную индукцию поля, созданного в точке O заданным проводником с током, по формуле (10), принимая для воздуха магнитную проницаемость $\mu \approx 1$:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 100 \text{ А}}{4\pi \cdot 0,05 \text{ м}} (3,14 + 1) = 0,83 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = 0,83 \text{ мТл}.$$

9.2. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле

План решения задач

1. При расчете силы Ампера, действующей на проводник с током в магнитном поле, решение следует начать с рисунка, на котором нужно отразить форму проводника и направление вектора магнитной индукции \vec{B} поля, в котором находится проводник.

2. Необходимо иметь в виду, что формула силы Ампера $F = IBl \sin \alpha$ справедлива только для прямого проводника с током I длиной l , который находится в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} . В случае неоднородного МП, а также для проводника криволинейной формы, проводник следует разделить на элементы тока $I d\vec{l}$ и показать на рисунке векторы сил $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$, действующих на элементы тока. Для этого необходимо выбрать два элемента тока, расположенных симметрично.

Направление векторов $d\vec{F}$ определяем по правилу векторного произведения или по правилу левой руки: располагаем руку так, чтобы линии магнитной индукции \vec{B} входили в ладонь, четыре пальца направляем вдоль тока I , тогда отогнутый большой палец покажет направление силы $d\vec{F}$. Сила, действующая на весь проводник, определяется как сумма векторов элементарных сил по всей длине проводника l :

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F}.$$

3. Свободный замкнутый контур с током (рамка или виток) устанавливается в магнитном поле так, чтобы его магнитный момент \vec{p}_m был сонаправлен с вектором магнитной индукции \vec{B} . При этом механический (вращающий) момент $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = 0$, а силы Ампера $d\vec{F}$, действующие на элементы тока контура, растягивают его. Такое положение ($\vec{p}_m \parallel \vec{B}$) контура с током в однородном магнитном поле является состоянием устойчивого равновесия контура.

Задача 32. По трем параллельным прямым проводникам, находящимся на одинаковом расстоянии $d = 10$ см друг от друга (рис. 63 а) текут одинаковые токи $I = 200$ А. В двух проводниках направления токов совпадают. Вычислите для каждого проводника силу, действующую на единицу длины проводника.

Дано

$$d = 0,10 \text{ м};$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I;$$

$$I = 200 \text{ А.}$$

$$\frac{d\vec{F}_1}{dl_1} - ? \quad \frac{d\vec{F}_2}{dl_2} - ?$$

$$\frac{d\vec{F}_3}{dl_3} - ?$$

Решение

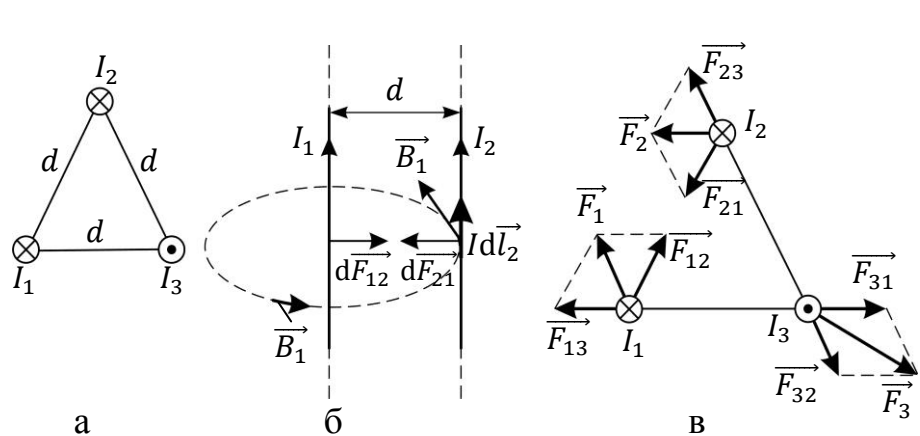


Рис. 63

Сначала рассмотрим взаимодействие двух проводников – первого и второго (рис. 63 б). На второй проводник с током I_2 действует магнитное поле с индукцией \vec{B}_1 , созданное током в первом проводе (соответственно, и на первый проводник действует магнитное поле \vec{B}_2 , созданное вторым проводом). Выберем на втором проводнике элемент тока Idl_2 , проведем линию магнитной индукции \vec{B}_1 (это окружность радиусом d) и по касательной к ней направим вектор \vec{B}_1 . Сила Ампера, действующая на выбранный элемент тока второго проводника со стороны МП первого тока

$$d\vec{F}_{21} = Id\vec{l}_2 \times \vec{B}_1. \quad (1)$$

Модуль этой силы

$$dF_{21} = Idl_2 B_1 \sin \alpha, \quad (2)$$

где угол между векторами $d\vec{l}_2$ и \vec{B}_1 $\alpha = 90^\circ$ и $\sin \alpha = 1$ (линия магнитного поля \vec{B}_1 расположена в плоскости, перпендикулярной проводу). Согласно формуле (2), сила, действующая со стороны первого провода на единицу длины второго провода:

$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = IB_1. \quad (3)$$

В формуле (3) индукция МП, созданная прямым длинным проводом с током I в точках на расстоянии d от провода, определяется следующим выражением:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi d}. \quad (4)$$

Направление силы определяем по правилу левой руки, располагая ладонь в плоскости рисунка: элемент тока $Id\vec{l}_2$ притягивается к первому проводнику. По третьему закону Ньютона, на элемент тока первого проводника будет действовать сила $d\vec{F}_{12} = -d\vec{F}_{21}$, т. е. равная по модулю (см. формулу (3)) и противоположно направленная (см. рис. 63 б). Таким образом, параллельные токи одинакового направления притягиваются друг к другу. Изменим мысленно на рис. 63 б направление второго тока на противоположное (как ток I_3) и правило левой руки покажет, что сила, действующая на элемент тока $Id\vec{l}_3$, направлена вправо, т. е. параллельные токи противоположных направлений взаимно отталкиваются.

На каждый из проводников действуют магнитные поля двух других токов. Величину каждой силы парного взаимодействия -того и -того проводов запишем, подставляя индукцию магнитного поля, определяемую формулой (4) (в данной задаче $B_1 = B_2 = B_3 = B$), в формулу (3):

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi d}. \quad (5)$$

В соответствии с полученным выражением (5), величина силы парного взаимодействия на единицу длины одинакова для каждого проводника.

Результирующую силу, действующую на каждый проводник, находим с помощью принципа суперпозиции сил:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}; \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}; \quad \vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}. \quad (6)$$

Покажем эти силы магнитного взаимодействия токов на рис. 63 в, учитывая, во-первых, взаимное направление токов, и во-вторых, равенство модулей всех сил парного взаимодействия \vec{F} . На рисунке заменим элементарную силу $d\vec{F}$ силой, действующей на весь i -тый провод со стороны -того тока, так как эти силы сонаправлены: $\vec{F} = \int_l d\vec{F}$.

Согласно формулам (6), сложим по два вектора сил, действующих на каждый проводник, геометрически: по правилу параллелограмма (треугольника) (см. рис. 63 в). Так как треугольники, имеющие сторонами векторы сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , равносторонние, то модули этих сил

$$F_1 = F_2 = F. \quad (7)$$

Модуль силы \vec{F}_3 найдем по теореме косинусов:

$$F_3 = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2 - 2F_{31}F_{32} \cos 120^\circ} = \sqrt{3}F. \quad (8)$$

Силы, действующие на единицу длины провода, с учетом формулы (5), представятся выражениями, соответствующими формулам (7) и (8):

$$\frac{dF_1}{dl_1} = \frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}, \quad (9)$$

$$\frac{dF_3}{dl_3} = \sqrt{3} \frac{dF_1}{dl_1}. \quad (10)$$

Вычисляем силы: а) на единицу длины первого и второго провода:

$$\frac{dF_1}{dl_1} = \frac{dF_2}{dl_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 200^2 \text{ А}^2}{2\pi \cdot 0,1 \text{ м}} = 8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} = 0,08 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

б) на единицу длины третьего провода:

$$\frac{dF_3}{dl_3} = \sqrt{3} \cdot 0,08 \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 0,14 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Задача 33. Квадратная проволочная рамка со стороной $l = 10$ см расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом (рис. 64 а). Расстояние от провода до ближайшей стороны рамки $a = 5$ см. Ток в проводе $I_1 = 100$ А, в рамке $I_2 = 10$ А. Определите силы \vec{F} , действующие на каждую сторону рамки, и силу, действующую на всю рамку.

Дано

$$l = 10 \text{ см};$$

$$a = 5 \text{ см};$$

$$I_1 = 100 \text{ А};$$

$$I_2 = 10 \text{ А}.$$

$$1) \vec{F} - ?$$

$$(\text{=} 1; 2; 3; 4);$$

$$2) \vec{F} - ?$$

Решение

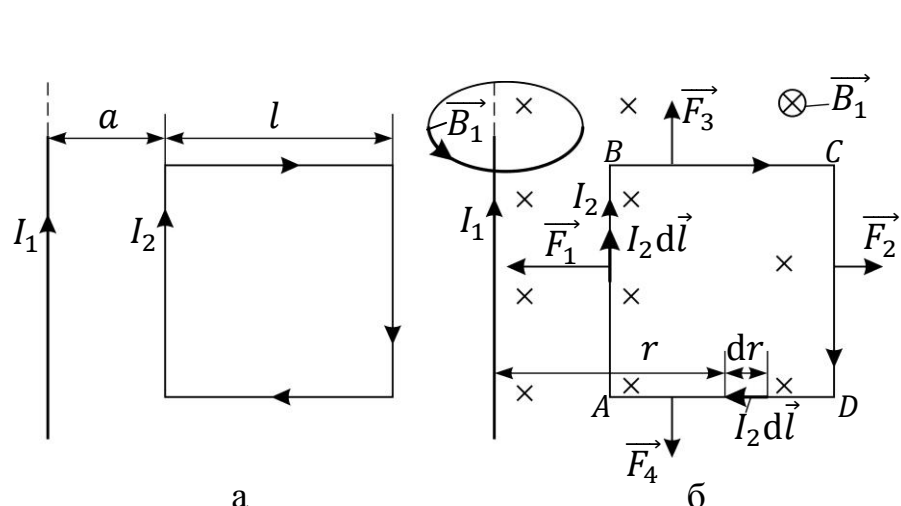


Рис. 64

Индукция \vec{B}_1 магнитного поля, создаваемого длинным прямым проводом с током I_1 в точке, находящейся на расстоянии r от провода, определяется следующей формулой:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi r}. \quad (1)$$

Величина B_1 уменьшается по мере увеличения расстояния r , следовательно, это магнитное поле неоднородное. Направление вектора \vec{B}_1 определяем по такому вращению буравчика, чтобы винт перемещался бы вдоль тока I_1 . В области, где находится рамка, вектор \vec{B}_1 направлен перпендикулярно плоскости рамки «от нас» (рис. 64 б).

Найдем силу \vec{F}_1 , действующую на сторону AB , суммируя бесконечно малые силы $d\vec{F}_1$, действующие на элементы тока $I_2 d\vec{l}$:

$$d\vec{F}_1 = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1; \quad (2)$$

$$\vec{F}_1 = \int_l d\vec{F}_1 = \int_l I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1. \quad (3)$$

По правилу левой руки определяем, что все векторы $d\vec{F}_1$, перпендикулярные вектору магнитной индукции \vec{B}_1 , лежат в плоскости рамки, а в этой плоскости они перпендикулярны стороне AB . Силы $d\vec{F}_1$ являются сонаправленными, причем, сторона AB притягивается к проводу, так как ток I_2 в ней одинакового направления с током I_1 в проводе (см. рис. 64 б). Модуль силы \vec{F}_1 :

$$F_1 = \int_l dF_1 = \int_0^l I_2 dl B_1 \sin 90^\circ = I_2 l B_1. \quad (4)$$

Здесь величина $B_1 = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi a}$ (в соответствии с формулой (1), в которой $r = a$ для стороны AB) одинакова во всех точках МП, где находится сторона рамки AB . Тогда действующая на нее сила

$$F_1 = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi a}. \quad (5)$$

Аналогичный расчет будет и для силы \vec{F}_2 , действующей на сторону рамки CD , так как вдоль этой стороны величина B_1 также одинакова, но меньше, чем для стороны AB , так как расстояние от провода больше: $r = a + l$. Соответственно $B_1 = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi(a+l)}$ и модуль силы \vec{F}_2 :

$$F_2 = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi(a+l)}. \quad (6)$$

Вектор \vec{F}_2 также перпендикулярен стороне рамки CD ($\vec{F}_2 I_2 d\vec{l}$), но он направлен от провода с током I_1 : токи I_1 в проводе и I_2 в стороне CD противоположных направлений, поэтому они отталкиваются (см. рис. 64 б).

Силы \vec{F}_3 и \vec{F}_4 , действующие на стороны BC и AD рамки с током, также перпендикулярны элементам тока $I_2 d\vec{l}$ и вектору магнитной индукции \vec{B}_1 , в соответствии с векторным произведением в формуле (2), и направления их определяем также по правилу левой руки (см. рис. 64 б). Стороны рамки BC и AD расположены одинаково по отношению к проводу

с током I_1 , магнитное поле которого действует на ток в рамке. Следовательно, модули этих сил одинаковы: $F_3 = F_4$.

Рассчитаем, например, силу F_4 , суммируя элементарные силы по длине стороны AD :

$$F_4 = \int_l dF_4 = \int_0^l I_2 dB_1 \sin 90^\circ = \int_0^l I_2 dl \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi r}. \quad (7)$$

Здесь величина B_1 не одинакова вдоль стороны AD , но уменьшается по мере удаления элемента тока $I_2 d\vec{l}$ от провода, согласно формуле (1). В подинтегральном выражении (7) заменим $dl = dr$ (см. рис. 64 б), чтобы перейти к одной переменной r – расстоянию элемента тока от провода; пределы по этой переменной: $r_1 = a$ и $r_2 = a + l$, – соответствуют начальному и конечному элементам тока $I_2 d\vec{l}$ на стороне AD . Продолжим расчет силы F_4 :

$$F_4 = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi} \int_a^{a+l} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(\frac{a+l}{a} \right). \quad (8)$$

Вычислим модули сил, действующих на стороны рамки, по формулам (5), (6) и (8):

$$F_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 100 \text{ А} \cdot 10 \text{ А}}{2\pi \cdot 0,05 \text{ м}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 0,40 \text{ мН}.$$

$$F_2 = F_1 \left(\frac{a}{a+l} \right) = 0,40 \text{ мН} \cdot \frac{0,05 \text{ м}}{(0,05+0,10) \text{ м}} = 0,13 \text{ мН}.$$

$$F_3 = F_4 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 100 \text{ А} \cdot 10 \text{ А}}{2\pi} \ln \left(\frac{(0,05+0,10) \text{ м}}{0,05 \text{ м}} \right) = 0,22 \text{ мН}.$$

Найдем результирующую силу, действующую на рамку в целом, складывая векторы сил, действующих на стороны рамки:

$$\vec{F} = \sum_1^4 \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (9)$$

Здесь $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$, так как $F_3 = F_4$ и вектор $\vec{F}_3 \uparrow \vec{F}_4$ (см. рис. 64 б). Так как сила $\vec{F}_2 \uparrow \vec{F}_1$, то модуль результирующей силы

$$F = F_1 - F_2 = 0,27 \text{ мН}.$$

Направление вектора результирующей силы \vec{F} совпадает с направлением большего из векторов сил – с вектором \vec{F}_1 .

Таким образом, в неоднородном магнитном поле на данную рамку с током действует сила \vec{F} в направлении градиента индукции МП: $\vec{F} \uparrow \text{grad} B_1$, который направлен в область более сильного МП. Силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 и \vec{F}_4 растягивают рамку с током, что соответствует данному случаю $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}_1$, где \vec{p}_m – магнитный момент рамки с током.

Задача 34. На оси контура с током, магнитный момент которого $p_m = 0,10 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, находится другой такой же контур. Магнитный момент

второго контура перпендикулярен оси первого контура. Расстояние между контурами $r = 1,0$ м, причем, размеры контуров малы по сравнению с расстоянием r . Определите механический момент \vec{M} , действующий на второй контур.

Дано

$$p_{m1} = p_{m2} = p_m;$$

$$p_m = 0,10 \text{ А} \cdot \text{м}^2;$$

$$r = 1,0 \text{ м.}$$

$$\vec{M} - ?$$

Решение

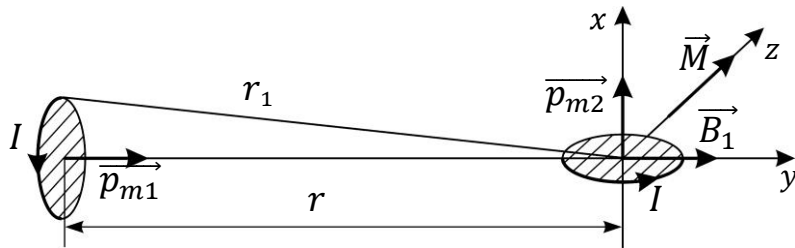


Рис. 65

Магнитный момент контура с током I – это вектор \vec{p}_m , направленный по нормали к плоскости контура так, что направление вектора \vec{p}_m связано с направлением тока в контуре правилом буравчика (правого винта). Первый контур с током создает магнитное поле с индукцией \vec{B}_1 . Величина \vec{B}_1 в точках на оси кругового контура рассчитана в решении задачи 27:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{r_1^3}, \quad (1)$$

где r_1 – расстояние от точек контура до точки в МП, в которой определяется величина B_1 (рис. 65). Так как по условию задачи расстояние r велико по сравнению с радиусом контура, то величина $r_1 \approx r$.

На второй контур с током в магнитном поле с индукцией \vec{B}_1 действует механический (вращающий) момент \vec{M} , величина которого определяется следующей формулой:

$$\vec{M} = \vec{p}_{m2} \times \vec{B}_1. \quad (2)$$

Так как размеры второго контура тоже малы, то величина B_1 несущественно изменяется вдоль плоскости второго контура. Поэтому примем ее равной B_1 , определяемой формулой (1), в которой $r_1 = r$. Согласно векторному произведению в формуле (2), вектор \vec{M} перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы \vec{p}_{m2} и \vec{B}_1 , т. е. он перпендикулярен плоскости рисунка (см. рис. 65). Этот механический момент будет стремиться повернуть второй контур до положения, в котором вектор $\vec{p}_{m2} \parallel \vec{B}_1$ (при этом величина M обратится в нуль).

Модуль вращающего момента, согласно формуле (2),

$$M = p_{m2} B_1 \sin \alpha, \quad (3)$$

где α – угол между векторами магнитного момента контура \vec{p}_{m2} и индукцией магнитного поля \vec{B}_1 . По условию задачи вектор $\vec{p}_{m2} \perp \vec{p}_{m1}$,

а последний создает магнитное поле $\vec{B}_1 \uparrow\uparrow \vec{p}_{m1}$, следовательно, вектор $\vec{p}_{m2} \vec{B}_1$ (см. рис. 65) и $\sin \alpha = 1$.

Подставляя величину магнитной индукции B_1 по формуле (1) в выражение (3), получаем следующую расчетную формулу:

$$M = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2p_{m1} p_{m2}}{r^3} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2p_m^2}{r^3}. \quad (4)$$

Вычисляем по формуле (4) механический момент, действующий на второй контур с током в магнитном поле, созданном первым контуром с током:

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 1}{4\pi} \frac{2 \cdot 0,1^2 \text{ А}^2 \cdot \text{м}^4}{1,0^3 \text{ м}^3} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Дж} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м} = 2 \text{ нН} \cdot \text{м}.$$

Задача 35. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии $d_1 = 10$ см друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи $I_1 = 10$ А и $I_2 = 20$ А. Какую работу A_l (на единицу длины проводника) нужно совершить, чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния $d_2 = 30$ см?

Дано

$$d_1 = 10 \text{ см};$$

$$I_1 = 10 \text{ А};$$

$$I_2 = 20 \text{ А};$$

$$d_2 = 30 \text{ см}.$$

$$A_l - ?$$

Решение

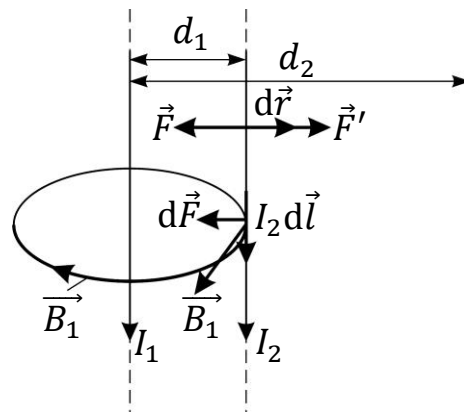


Рис. 66

Параллельные токи одинакового направления притягиваются друг к другу, т. е. второй проводник с током I_2 притягивается к первому силой Ампера \vec{F} . Чтобы его отодвинуть от первого проводника, нужно приложить внешнюю силу \vec{F}' , незначительно превышающую силу притяжения проводников: $\vec{F}' \geq \vec{F}$. Работа этой внешней силы

$$A = \int_1^2 \vec{F}' \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F' dr \cos(\vec{F}' d\vec{r}) = \int_1^2 F' dr = \int_1^2 F dr. \quad (1)$$

Найдем силу Ампера – силу магнитного взаимодействия проводников с током, как силу, с которой магнитное поле первого проводника \vec{B}_1 действует на ток I_2 во втором проводнике:

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1. \quad (2)$$

В уравнении (2) суммируются элементарные силы $d\vec{F}$, действующие на элементы тока $I_2 d\vec{l}$, расположенные по всей длине второго проводника с током. Направление сил $d\vec{F}$ определяем по правилу левой руки, размещая ладонь в плоскости рисунка (рис. 66), так как вектор магнитной индукции \vec{B}_1 перпендикулярен плоскости рисунка (он направлен «к нам»). Силы $d\vec{F}$, действующие на элементы тока $I_2 d\vec{l}$, сонаправлены, поэтому можем складывать их модули:

$$F = \int_l dF = \int_0^l I_2 B_1 dl \sin(d\vec{l} \vec{B}_1). \quad (3)$$

Здесь $\sin(d\vec{l} \vec{B}_1) = 1$, так как вектор $d\vec{l} \vec{B}_1$; B_1 – магнитная индукция поля, созданного прямым током I_1 , она определяется формулой

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi r}, \quad (4)$$

где r – расстояние от проводника с током I_1 до точки, в которой определяется индукция магнитного поля.

Подставим величину B_1 в подынтегральное выражение (3) и выполним интегрирование, отметив, что расстояние r всех элементов тока второго проводника от первого одинаково, так как проводники параллельные:

$$F = \int_0^l I_2 dl B_1 = I_2 B_1 \int_0^l dl = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi r}. \quad (5)$$

Сила Ампера, действующая на единицу длины проводника, в соответствии с формулой (5), представится следующим выражением:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi r}. \quad (6)$$

Согласно полученной формуле, эта сила уменьшается с увеличением расстояния r между проводниками, т. е. имеем дело с работой переменной силы, которая определяется, как сумма элементарных работ, интегралом (1). Работу на единицу длины проводника найдем, подставляя силу $\frac{F}{l}$ по формуле (6) в подынтегральное выражение (1):

$$A_l = \int_{d_1}^{d_2} \frac{F}{l} dr = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right). \quad (7)$$

Вычислим работу, которую совершает внешняя сила \vec{F}' при удалении от первого проводника с током I_1 второго проводника с током I_2 на единицу его длины, принимая, что магнитная проницаемость воздуха $\mu \approx 1$:

$$A_l = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 10 \text{ А} \cdot 20 \text{ А}}{2\pi} \ln\left(\frac{30 \text{ см}}{10 \text{ см}}\right) = 4,4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = 44 \frac{\text{мкДж}}{\text{м}}.$$

Задача 36. Тонкий проводник в виде полукольца радиусом $R = 5$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл. Плоскость полукольца перпендикулярна линиям магнитной индукции,

а подводящие провода расположены вдоль линий \vec{B} . По проводнику протекает ток $I = 50$ А. Определите силу \vec{F} , действующую на проводник.

Дано

Решение

$$R = 0,05 \text{ м};$$

$$B = 10 \text{ мТл};$$

$$I = 50 \text{ А}.$$

$$\vec{F} - ?$$

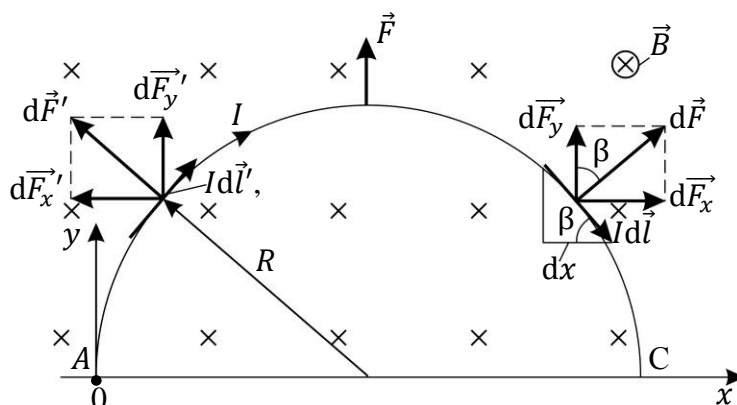


Рис. 67

Выделим на полукольце элемент тока $Id\vec{l}$ и определим направление действующей на него силы Ампера

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Для этого используем правило левой руки, располагая ладонь в плоскости рисунка (рис. 67). Так как элементы тока кольцевого проводника имеют различную ориентацию, то векторы $d\vec{F}$, перпендикулярные элементам тока $Id\vec{l}$, образуют «веер векторов» в плоскости полукольца. Для сложения таких векторов каждый элементарный вектор силы разложим на составляющие по осям x и y :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_x + d\vec{F}_y. \quad (2)$$

Силу, действующую на весь проводник длины l , находим, суммируя по всей длине полукольца векторы сил, действующих на элементы тока:

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l d\vec{F}_x + \int_l d\vec{F}_y. \quad (3)$$

Покажем на рисунке вектор $d\vec{F}'$, действующий на элемент тока $Id\vec{l}'$, расположенный симметрично элементу тока $Id\vec{l}$. По рисунку видно, что вектор $d\vec{F}'_x \uparrow\downarrow d\vec{F}_x$, следовательно, они попарно компенсируются при суммировании и в результате этого $\int_l d\vec{F}_x = 0$. Составляющие силы Ампера $d\vec{F}_y$, действующие на все элементы тока, сонаправлены, поэтому векторное равенство (3) заменяем скалярным:

$$F = F_y = \int_l dF_y. \quad (4)$$

Здесь проекция силы $dF_y = dF \cdot \cos \beta$ (см. треугольник на рис. 67). Элементарная сила Ампера

$$dF = IdlB \sin \alpha, \quad (5)$$

где α – угол между векторами элемента тока $I d\vec{l}$ и магнитной индукции \vec{B} ; по условию задачи $\vec{B} \perp I d\vec{l}$, поэтому $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$.

Подставляя величину проекции силы dF_y в уравнение (4), перепишем его в следующем виде:

$$F = \int_l IB dl \cos \beta. \quad (6)$$

В подинтегральном выражении содержатся две переменные – элемент длины проводника dl и угол β . Связь этих переменных находим из малого треугольника с гипотенузой dl (см. рис. 67): $dl \cos \beta = dx$. Перейдем к переменной x и запишем для нее пределы интегрирования. При сложении сил от всех элементов тока полукольца переменная x изменяется от нуля (т. А на рис. 67) до $2R$ (т. С на рис. 67), где R – радиус полукольца. Тогда интеграл (6) принимает следующий вид:

$$F = \int_0^{2R} IB dx = 2IBR. \quad (7)$$

Вычислим модуль силы Ампера, действующей в магнитном поле на полукольцо с током:

$$F = 2 \cdot 50 \text{ А} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ Тл} \cdot 0,05 \text{ м} = 0,05 \text{ Н}.$$

Вектор $\vec{F} = \vec{F}_y$, а величина $F_x = 0$, следовательно, сила Ампера \vec{F} направлена вдоль оси y (см. рис. 67).

Задача 37. Тонкий проводник в виде полукольца радиусом $R = 10$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 20$ мТл. Вектор \vec{B} лежит в плоскости полукольца и перпендикулярен его диаметру (рис. 68). По проводнику течет ток $I = 50$ А. Определите силу \vec{F} , действующую на полукольцо.

Дано

$R = 0,10 \text{ м};$ $B = 20 \text{ мТл};$ $I = 50 \text{ А}.$

$\vec{F} = ?$

Решение

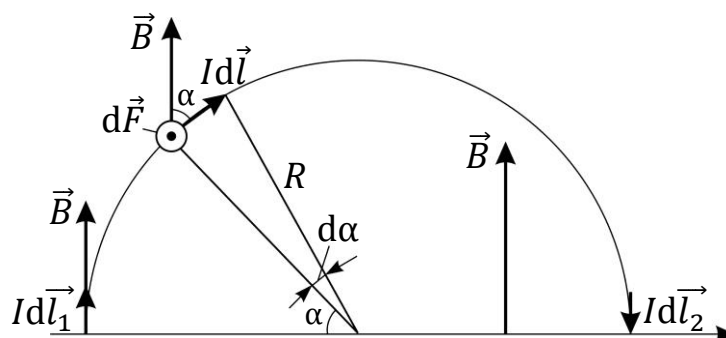


Рис. 68

Сделаем чертеж (см. рис. 68), на котором покажем элемент тока $I d\vec{l}$, лежащий в плоскости рисунка. Сила Ампера, действующая на данный элемент тока, определяется по закону Ампера:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Силу, действующую на все элементы тока полукольца, найдем, суммируя элементарные силы:

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F}. \quad (2)$$

Согласно векторному произведению (1), сила $d\vec{F}$ перпендикулярна элементу тока $Id\vec{l}$ и магнитной индукции \vec{B} . Так как оба вектора лежат в плоскости рисунка, то вектор силы $d\vec{F}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен «к нам». Для всех элементов тока векторы $d\vec{F}$ сонаправлены, следовательно, и вектор силы \vec{F} , действующей на полукольцо, также направлен перпендикулярно плоскости рисунка.

Модуль этого вектора находим, используя формулы (1) и (2):

$$F = \int_l dF = \int_l IdlB \sin \alpha. \quad (3)$$

Здесь α – угол между векторами элемента тока $Id\vec{l}$ и магнитной индукции \vec{B} (см. рис. 68). Подинтегральное выражение (3) содержит две переменные – элемент длины проводника dl и угол α . Перейдем к одной переменной – к углу α , заменяя $\frac{dl}{R} = \sin(\alpha) = d\alpha$. Пределы по этой переменной видны по рисунку (см. рис. 68). Суммируя силы по длине проводника, начинаем с первого элемента тока $Id\vec{l}_1$, для которого $\alpha = 0$, и заканчиваем последним элементом тока $Id\vec{l}_2$, – для него $\alpha = \pi$. Соответственно, уравнение (3) принимает следующий вид:

$$F = \int_0^\pi IBR \sin \alpha d\alpha = IBR(-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = 2IBR.$$

Вычисляем силу, действующую на полукольцо с током в магнитном поле заданной ориентации:

$$F = 2 \cdot 50 \text{ А} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ Тл} \cdot 0,10 \text{ м} = 0,20 \text{ Н}.$$

9.3. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

План решения задач

1. Решение следует начинать с рисунка, на котором необходимо показать направление силовых характеристик полей – напряженности электростатического поля \vec{E} и магнитной индукции \vec{B} . Затем, в соответствии с формулой Лоренца:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{эл}} + \vec{F}_{\text{магн}} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1)$$

нужно показать направление электрической силы $\vec{F}_{\text{эл}}$ и магнитной – $\vec{F}_{\text{магн}}$ (это сила Лоренца \vec{F}_L).

2. Направление сил определяем в соответствии с формулой (1): $\vec{F}_{эл} \uparrow \vec{E}$, а сила Лоренца определяется по правилу левой руки: *располагая руку так, чтобы линии магнитной индукции \vec{B} входили в ладонь, четыре пальца направить вдоль скорости частицы \vec{v} , тогда отогнутый большой палец покажет направление силы \vec{F}_L* . Но следует иметь в виду, что в формуле (1) заряд частицы Q записывается со своим знаком; следовательно, для отрицательно заряженной частицы $\vec{F}_{эл} \downarrow \vec{E}$, а сила Лоренца, определенная по правилу левой руки для положительно заряженных частиц, в случае отрицательного заряда будет направлена противоположно найденной силе.

3. На рисунке необходимо показать также траекторию движения частицы. Она обычно задана в условии задачи: 1) либо оговорена явно, например, частица движется *прямолинейно*, или найти силу эквивалентного *кругового* тока, или дан шаг *винтовой линии*; 2) или указана неявно. В этом втором случае задается угол α между векторами скорости частицы \vec{v} и магнитной индукции \vec{B} . Этих данных достаточно, чтобы определить величину силы Лоренца, которая создает нормальное (центростремительное) ускорение частицы (см. п. 7.3).

4. Заметим, что для элементарных частиц: электрона и протона, – а также и для ионов, действующая на них сила тяжести $m\vec{g}$ мала по сравнению с электрической и магнитной силами. Поэтому ее опускают в уравнениях движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях.

Задача 38. Однозарядный ион прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ кВ и влетел перпендикулярно линиям магнитной индукции в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. В магнитном поле ион начал движение по окружности радиусом $R = 5,69$ см. Определите удельный заряд иона $\frac{q}{m}$ и его относительную атомную массу A .

Дано

$$Q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$$

$$U = 1 \text{ кВ};$$

$$\vec{v} \perp \vec{B};$$

$$B = 0,5 \text{ Тл};$$

$$R = 5,69 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$\frac{q}{m} - ? \quad A - ?$$

Решение

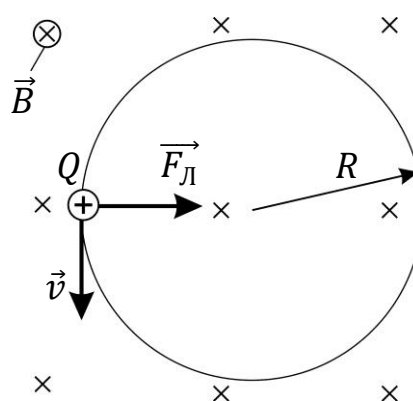


Рис. 69

При движении заряженной частицы в электростатическом поле оно совершает работу

$$A = QU, \quad (1)$$

ускоряя заряженную частицу – ион. Работа сил поля идет на приращение кинетической энергии иона:

$$A = \Delta W_K = W_{K \text{ кон}} - W_{K \text{ нач}}. \quad (2)$$

Принимая, что начальная энергия иона $W_{K \text{ нач}} = 0$, и объединяя формулы (1) и (2), запишем следующее равенство:

$$QU = \frac{mv^2}{2}. \quad (3)$$

Из формулы (3) находим скорость иона:

$$v = \sqrt{\frac{Q}{m} 2U}. \quad (4)$$

Ион, движущийся с приобретенной в ЭСП скоростью v , в магнитном поле испытывает действие силы Лоренца:

$$\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Направление вектора силы \vec{F}_L определяем по правилу левой руки (рис. 69), располагая ладонь руки в плоскости рисунка. Так как по условию задачи вектор скорости \vec{v} \vec{B} , т. е. угол между этими векторами $\alpha = 90^\circ$, то $\sin \alpha = 1$ и модуль силы Лоренца

$$F_L = QvB. \quad (5)$$

Сила Лоренца, перпендикулярная скорости движения иона, сообщает частице нормальное, или центростремительное ускорение \vec{a}_n . Эта центростремительная сила направлена к центру окружности, а вектор скорости \vec{v} – по касательной к окружности; такая траектория показана на рисунке (см. рис. 69). Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a}_n = \vec{F}_L.$$

Запишем проекцию уравнения этого закона на нормаль к траектории, подставляя величину нормального ускорения $a_n = \frac{v^2}{R}$ и силу Лоренца по формуле (5):

$$\frac{mv^2}{R} = QvB; \quad \rightarrow \quad v = \frac{Q}{m}BR. \quad (6)$$

Приравняем скорость, полученную ионом в электрическом поле, – по формуле (3) и величину скорости, соответствующую заданной окружности в магнитном поле, – по формуле (6):

$$\sqrt{\frac{Q}{m} 2U} = \frac{Q}{m}BR; \quad \rightarrow \quad \sqrt{2U} = \sqrt{\frac{Q}{m}}BR.$$

Из последнего равенства выражаем удельный заряд иона:

$$\frac{Q}{m} = \frac{2U}{B^2R^2}. \quad (7)$$

Вычисляем величину удельного заряда иона по формуле (7):

$$\frac{Q}{m} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ В}}{(0,5)^2 \text{ Тл}^2 \cdot 5,69^2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 2,47 \cdot 10^6 \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Найдем массу иона, учитывая, что удельный заряд данного иона

$$\frac{Q}{m} = \frac{e}{m}; \quad \rightarrow \quad m = \frac{e}{\left(\frac{Q}{m}\right)}.$$

Вычисляем массу иона:

$$m = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}}{2,47 \cdot 10^6 \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}} = 6,48 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Выразим массу иона в атомных единицах массы, учитывая, что 1 а.е.м. = $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$:

$$m = \frac{6,48 \cdot 10^{-26} \text{ кг}}{1,66 \cdot 10^{-27} \frac{\text{кг}}{\text{а.е.м.}}} = 39,0 \text{ а.е.м.}$$

Найденная относительная атомная масса показывает, что это ион калия K^+ .

Задача 39. Электрон влетает со скоростью $v = 1,0 \frac{\text{Мм}}{\text{с}}$ в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1,5 \text{ мТл}$ перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите период T обращения электрона, силу эквивалентного кругового тока $I_{\text{ЭКВ}}$ и магнитный момент \vec{p}_m этого тока.

Дано

Электрон:

$$Q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$$

$$m = 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ кг};$$

$$\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}};$$

$$v = 1,0 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$B = 1,5 \text{ мТл}.$$

$$T - ? \quad I_{\text{ЭКВ}} - ? \quad \vec{p}_m - ?$$

Решение

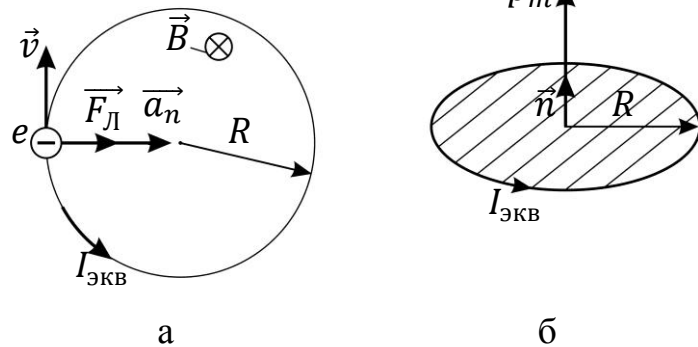


Рис. 70

Рассмотрим движение электрона в магнитном поле. На электрон действует сила Лоренца

$$\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1)$$

направление которой находим по правилу левой руки с учетом знака заряда. Направление силы, полученное по этому правилу для заряда Q^+ , изменяем на противоположное, так как электрон имеет отрицательный заряд. Чтобы траектория движения электрона располагалась в плоскости рисунка, вектор магнитной индукции \vec{B} направим перпендикулярно этой плоскости (рис. 70 а). Показав на рисунке векторы скорости \vec{v} и силы

Лоренца $\vec{F}_L \vec{v}$, изображаем траекторию движения электрона. При этом окружность проводим так, чтобы сила Лоренца, которая является центростремительной, была направлена к центру окружности, а скорость частицы \vec{v} – по касательной к траектории. Сила Лоренца сообщает электрону нормальное (центростремительное) ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на нормаль к траектории:

$$ma_n = F_L, \text{ или } \frac{mv^2}{R} = QvB \sin \alpha. \quad (2)$$

Здесь α – угол между векторами скорости \vec{v} и магнитной индукции \vec{B} ; по условию задачи $\alpha = 90^\circ$ и $\sin \alpha = 1$.

Период обращения электрона T – время одного оборота, найдем из формулы пути s для равномерного движения электрона по окружности:

$$s = 2\pi R = vT; \rightarrow T = \frac{2\pi R}{v}. \quad (3)$$

Необходимое для расчета отношение радиуса окружности R к скорости частицы v выразим из закона динамики (2):

$$\frac{R}{v} = \frac{m}{QB}. \quad (4)$$

После подстановки выражения (4) в формулу (3) получаем расчетную формулу величины периода обращения электрона в магнитном поле:

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{Q}{m}\right)B}. \quad (5)$$

Вычисляем величину периода обращения частицы:

$$T = \frac{2 \cdot 3,14}{1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}} = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

Силу эквивалентного кругового тока, создаваемого движением электрона, найдем, используя определительную формулу величины постоянного тока: $I = \frac{Q}{t}$, где Q – заряд, перенесенный через сечение проводника за время t . Для этого мысленно поместим на круговую орбиту электрона проводник и заметим, что за время, равное периоду обращения, электрон переносит свой заряд, равный e . При этом соответствующий ток

$$I_{\text{экв}} = \frac{e}{T} = \frac{e \left(\frac{Q}{m}\right)B}{2\pi}. \quad (6)$$

Вычисляем силу эквивалентного кругового тока, отметив, что его направление, показанное на рис. 70 а, – против часовой стрелки, противоположно скорости движения электрона, так как за направление тока принимают направление скорости движения положительных зарядов:

$$I_{\text{экв}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}}{2 \cdot 3,14} = 0,67 \cdot 10^{-11} \text{ А.}$$

Магнитный момент эквивалентного кругового тока находим по определительной формуле:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (7)$$

где $I = I_{\text{ЭКВ}}$ – ток в контуре; $S = \pi R^2$ – площадь, ограниченная контуром, \vec{n} – единичная нормаль к площади контура, ее направление связано с направлением тока $I_{\text{ЭКВ}}$ правилом правого винта (буравчика). В нашем случае векторы \vec{n} и магнитный момент $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{n}$ направлены перпендикулярно плоскости, в которой расположены траектория электрона и круговой ток $I_{\text{ЭКВ}}$ (рис. 70 б).

Подставляя в формулу (7) величину тока $I_{\text{ЭКВ}}$ по формуле (6) и радиус окружности, выраженный из формулы (4), получим расчетную формулу магнитного момента эквивалентного кругового тока в следующем виде:

$$p_m = \frac{e\left(\frac{Q}{m}\right)B}{2\pi} \frac{\pi v^2}{\left(\frac{Q}{m}B\right)^2} = \frac{mv^2}{2B}.$$

Вычисляем величину магнитного момента кругового тока, созданного движением электрона в магнитном поле:

$$p_m = \frac{0,911 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \cdot 10^{12} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}} = 3,0 \cdot 10^{-16} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Задача 40. Протон со скоростью $v = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10$ мТл. Вектор скорости протона направлен под углом $\alpha = 60^\circ$ к линиям магнитной индукции. Определите радиус R и шаг h винтовой линии, по которой движется протон.

Дано

Протон:

$$m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг};$$

$$Q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$$

$$v = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$B = 0,010 \text{ Тл};$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

$$R - ? \quad h - ?$$

Решение

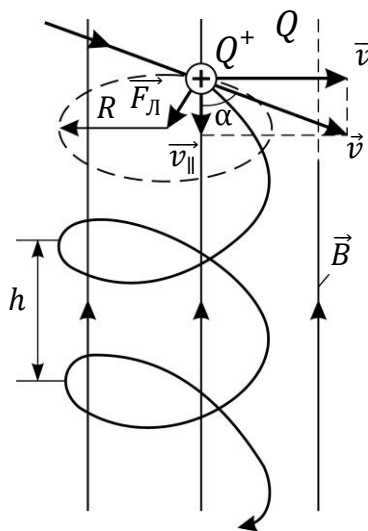


Рис. 71

Для описания движения протона удобно представить вектор его скорости \vec{v} как сумму двух составляющих, одна из которых – \vec{v}_{\parallel} направлена вдоль линий индукции магнитного поля \vec{B} , а вторая – \vec{v}_{\perp} перпендикулярна им (рис. 71). Тогда сила Лоренца, действующая на протон, запишется в следующем виде:

$$\vec{F}_L = Q(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}) \times \vec{B} = Q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1)$$

так как для коллинеарных векторов \vec{v}_{\parallel} и \vec{B} величина $\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = 0$. Следовательно, составляющая скорости $\vec{v}_{\parallel} = \overrightarrow{\text{const}}$, т. е. не изменяется ни по модулю, ни по направлению. С этой скоростью протон будет двигаться равномерно и прямолинейно вдоль линий магнитного поля \vec{B} . Составляющая скорости $v = v \sin \alpha$ (см. рис. 71) остается постоянной по модулю, но непрерывно изменяет свое направление под действием силы Лоренца, так как эта сила сообщает протону центростремительное ускорение.

Таким образом, протон участвует в двух движениях: равномерном и прямолинейном со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ параллельно линиям индукции МП и во вращательном движении в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции. В результате наложения этих двух независимых движений траекторией протона будет винтовая линия.

Для определения радиуса винтовой линии применим второй закон Ньютона в проекции на нормаль к окружности витка:

$$ma_n = F_L, \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{R} = QvB. \quad (2)$$

Подставляя составляющую скорости протона $v = v \sin \alpha$, выразим радиус

$$R = \frac{v \sin \alpha}{\left(\frac{Q}{m}\right)B}. \quad (3)$$

Вычисляем величину радиуса винтовой линии

$$R = \frac{1 \cdot 10^4 \frac{\text{м} \cdot \sqrt{3}}{\text{с} \cdot 2}}{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}} \cdot 0,01 \text{ Тл}} = 0,90 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 9,0 \text{ мм}.$$

Шаг винтовой линии h находим по формуле пути при равномерном прямолинейном движении:

$$h = v_{\parallel} \cdot T = v \cos \alpha \cdot T, \quad (4)$$

где T – период обращения (время одного оборота). Чтобы найти величину периода, запишем формулу пути s для равномерного движения протона по окружности со скоростью v :

$$s = 2\pi R = vT; \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{v}. \quad (5)$$

Подставляя величину радиуса окружности по формуле (3), получаем период обращения протона в магнитном поле:

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{Q}{m}\right)B}. \quad (6)$$

С учетом этого выражения формула (4) преобразуется в следующую расчетную формулу шага винтовой линии:

$$h = \frac{2\pi v \cos \alpha}{\left(\frac{Q}{m}\right)B}. \quad (7)$$

Вычисляем величину h :

$$h = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^4 \frac{\text{М}}{\text{с}} \cdot 0,5}{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}} \cdot 0,01 \text{ Тл}} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 33 \text{ мм}.$$

Задача 41. Альфа-частица со скоростью $v = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{М}}{\text{с}}$ влетает в скрещенные под прямым углом электростатическое и магнитное поля. Напряженность электрического поля $E = 2 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$, магнитная индукция $B = 2 \text{ мТл}$. Определите ускорение \vec{a} α -частицы в момент вхождения ее в область пространства, где существуют поля. Скорость частицы перпендикулярна векторам \vec{B} и \vec{E} , а силы, действующие на α -частицу со стороны этих полей, направлены противоположно друг другу.

Дано

α -частица (He^{2+}):
 $Q = 2e$;
 $m = 4 \text{ а. е. м.}$;
 $v = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{М}}{\text{с}}$;
 $E = 2 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$;
 $B = 2 \text{ мТл}$;
 $\vec{B} \perp \vec{E}$; $\vec{v} \perp (\vec{B} \text{ и } \vec{E})$;
 $\vec{F}_{\text{эл}} \updownarrow \vec{F}_{\text{л}}$.
 $\vec{a} - ?$

Решение

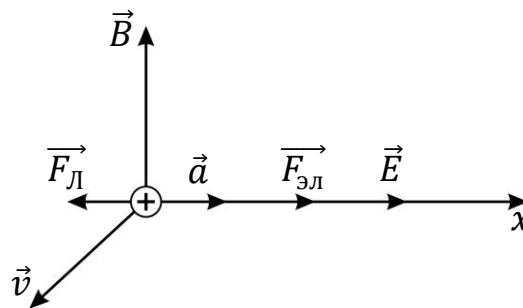


Рис. 72

Показываем на рис. 72 направление силовых характеристик полей \vec{B} и \vec{E} , в соответствии с условием задачи, и направление электрической и магнитной сил: $\vec{F}_{\text{эл}} = Q\vec{E}$, поэтому $\vec{F}_{\text{эл}} \uparrow \vec{E}$, так как заряд α -частицы положительный; $\vec{F}_{\text{магн}} \equiv \vec{F}_{\text{л}} \downarrow \vec{F}_{\text{эл}}$ по условию задачи. После этого определяем направление вектора скорости частицы \vec{v} – оно должно быть таково, чтобы по правилу левой руки получить направление силы Лоренца, которая уже показана, как направленная противоположно электрической силе (см. рис. 72).

Записываем формулу Лоренца для силы, действующей на заряженную частицу в электрическом и магнитном полях:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{эл}} + \vec{F}_{\text{магн}} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Эта формула отражает принцип суперпозиции сил (независимости их действия). Проекция силы \vec{F} на ось x , которая выбрана параллельной вектору напряженности электрического поля \vec{E} , запишется в виде:

$$F_x = QE - QvB. \quad (2)$$

Здесь при записи модуля силы Лоренца учтено, что вектор $\vec{v}\vec{B}$, поэтому $\sin \alpha = 1$.

Проекцию ускорения на ось x определим по второму закону Ньютона:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{Q(E - vB)}{m}. \quad (3)$$

Вычисляем ускорение, учитывая, что $1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$:

$$a_x = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} (2 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}} - 4 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ Тл})}{4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}} = 0,58 \cdot 10^{11} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Проекция ускорения альфа-частицы на ось x положительна, следовательно, ускорение частицы направлено вдоль оси x и совпадает по направлению с электрической силой, которая по модулю больше, чем магнитная, в условиях данной задачи.

Задача 42. В скрещенные под прямым углом однородные электрическое и магнитное поля влетает ион. Напряженность магнитного поля $H = 2 \frac{\text{МА}}{\text{м}}$, а напряженность электростатического поля $E = 50 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$. Определите величину и направление вектора скорости \vec{v} , при которых движение иона в этих полях будет *прямолинейным и равномерным*.

Дано

$$H = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{А}}{\text{м}};$$

$$E = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

$\vec{v} - ?$

Решение

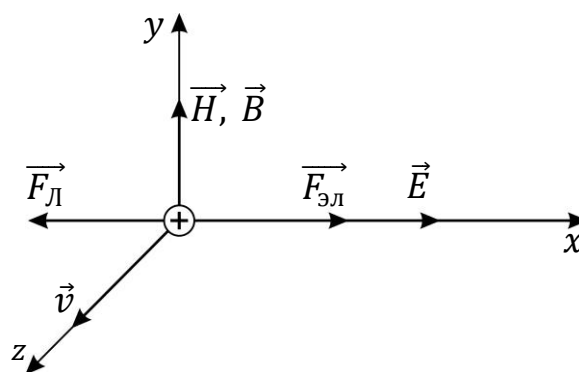


Рис.73

В области пространства, где совмещены электрическое и магнитное поля, на движущийся ион действуют две силы: электрическая $\vec{F}_{\text{эл}}$ и магнитная – сила Лоренца $\vec{F}_{\text{л}}$. Для положительно заряженного иона электрическая сила сонаправлена с напряженностью электрического поля: $\vec{F}_{\text{эл}} \parallel \vec{E}$ (рис. 73), так как эта сила

$$\vec{F}_{\text{эл}} = Q\vec{E}. \quad (1)$$

Сила Лоренца определяется формулой

$$\vec{F}_{\text{л}} = Q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2)$$

При прямолинейном равномерном движении иона его скорость $\vec{v} = \overline{\text{const}}$, а ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$. Следовательно, в соответствии

со вторым законом Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}$, – необходимо, чтобы результирующая сила \vec{F} , действующая на заряженную частицу со стороны обоих полей, была равна нулю, т. е. действие электрической и магнитной сил должно быть взаимно скомпенсировано:

$$\vec{F}_{\text{эл}} + \vec{F}_L = 0; \rightarrow \vec{F}_L = -\vec{F}_{\text{эл}}. \quad (3)$$

Соответственно, направляем вектор силы Лоренца $\vec{F}_L \updownarrow \vec{F}_{\text{эл}}$ (см. рис. 73). Вектор скорости иона \vec{v} направлен вдоль линии, перпендикулярной вектору силы Лоренца, так как, согласно векторному произведению (2), $\vec{F}_L \perp \vec{v}$. Из двух линий, перпендикулярных оси x , вдоль которой направлена сила Лоренца, выбираем для скорости ось z , а не y , так как в случае $\vec{v} \uparrow \vec{B}$ сила Лоренца обратилась бы в нуль (см. формулу (2)). Вектор \vec{v} направим в положительном направлении оси z , чтобы по правилу левой руки получить заданное направление силы Лоренца (см. рис. 73).

В соответствии с формулой (3), приравниваем модули электрической и магнитной сил:

$$QE = QvB. \quad (4)$$

Здесь в векторном произведении $\sin \alpha = 1$, так как скорость частицы $\vec{v} \perp \vec{B}$ (см. рис. 73). Из равенства (4) выражаем искомую величину скорости иона:

$$v = \frac{E}{B}, \text{ или } v = \frac{E}{\mu_0 \mu H}. \quad (5)$$

Здесь магнитная проницаемость вакуума $\mu = 1$, так как только в вакууме возможно движение ионов без соударений с молекулами среды – воздуха.

Вычисляем скорость иона по расчетной формуле (5):

$$v = \frac{5 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 2 \cdot 10^6 \frac{\text{А}}{\text{м}}} = 2,0 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Отметим, что рассмотренное выше движение ионов в скрещенных электрическом и магнитном полях используется в *фильтре скоростей*, который обычно является составной частью масс-спектрометров и других приборов и устройств. Фильтр предназначен для выделения из пучка ионов частиц с определенной скоростью, величину которой можно рассчитать, как это сделано в решении данной задачи.

9.4. Магнитный поток. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

План решения задач

1. При вычислении магнитного потока Φ следует обращать внимание на характер магнитного поля. В случае однородного поля величина магнитного потока определяется простой формулой:

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha,$$

где B_n – проекция вектора магнитной индукции \vec{B} на нормаль \vec{n} к плоскости контура площадью S ; α – угол между векторами \vec{n} и \vec{B} .

Для неоднородного поля необходимо вычислять интеграл:

$$\Phi = \int_S B_n dS.$$

2. В условии задачи нередко задают угол φ между вектором магнитной

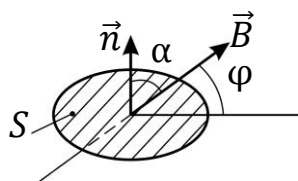


Рис. 74

индукции \vec{B} и плоскостью контура (рис. 74). В таком случае необходим рисунок (см. рис. 74), по которому видно, что угол $\alpha = 90^\circ - \varphi$; тогда

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi.$$

3. Расчет работы по перемещению проводника или контура с током в магнитном поле, независимо от того, движется проводник поступательно (работа силы Ампера \vec{F}) или происходит поворот контура (работа механического момента сил Ампера), наиболее просто выполняется с помощью следующей формулы:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где I – ток в контуре; Φ_2 и Φ_1 – магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром, в конечном (индекс 2) и в начальном (индекс 1) положениях контура, соответственно. Отметим, что работа сил Ампера положительна. Если при вычислении получена отрицательная величина, то это означает, что работу по заданному перемещению осуществляют внешние силы $\vec{F}_{\text{внеш}} \uparrow \vec{F}$, а модуль $F_{\text{внеш}} \geq F$, где F – сила Ампера.

4. Заметим, что единица измерения магнитного потока $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$, – весьма большая величина. Поэтому в обычных полях с магнитной индукцией B порядка 1 мТл магнитный поток Φ через поверхность контуров небольших размеров площадью $S \approx 1 \text{ см}^2$ по порядку величины не превышает $1 \cdot 10^{-6} \text{ Вб} = 1 \text{ мкВб}$.

Задача 43. Обмотка соленоида с током $I = 5 \text{ А}$ содержит $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. В средней части соленоида помещен круговой контур радиусом $R = 2 \text{ см}$. Плоскость контура расположена под углом $\varphi = 30^\circ$ к оси соленоида. Определите магнитный поток Φ , пронизывающий контур.

Дано

$$I = 5 \text{ А};$$

$$n = 10 \frac{\text{ВИТКОВ}}{\text{СМ}} = 10^3 \frac{\text{ВИТКОВ}}{\text{М}};$$

$$R = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\varphi = 30^\circ.$$

Решение

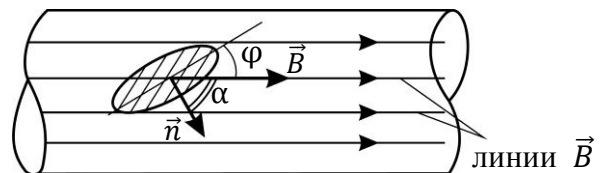


Рис. 75

$\Phi = ?$

Линии магнитного поля внутри соленоида параллельны его оси (рис. 75). В средней части соленоида,

удаленной от его торцов, индукция магнитного поля определяется по формуле:

$$B = \mu_0 \mu n I, \quad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость сердечника (для воздуха $\mu \approx 1$); n – число витков на единицу длины соленоида; I – сила тока в обмотке соленоида. Величина B одинакова в сечении соленоида, т.е. его магнитное поле является однородным.

Магнитный поток Φ через площадь контура в однородном магнитном поле определим по следующей формуле:

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha, \quad (2)$$

где $S = \pi R^2$ – площадь, ограниченная контуром; α – угол между нормалью \vec{n} к плоскости контура и вектором магнитной индукции \vec{B} . По рисунку (см. рис. 75) видно, что угол $\alpha = 90^\circ - \varphi = 60^\circ$.

Подставляя в формулу (2) величины магнитной индукции B и площади S , получаем расчетную формулу в следующем виде:

$$\Phi = \pi \mu_0 \mu n I R^2 \cos(90^\circ - \varphi). \quad (3)$$

Вычисляем магнитный поток Φ , пронизывающий контур, помещенный внутри данного соленоида:

$$\Phi = 3,14 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 10^3 \frac{1}{\text{м}} \cdot 5 \text{ А} \cdot 2^2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 0,5 = 0,79 \times 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{А} = 0,79 \text{ мкВб}.$$

Задача 44. Магнитный момент длинного соленоида $p_m = 1,0 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, длина соленоида $l = 40 \text{ см}$. Определите магнитный поток Φ сквозь сечение сердечника соленоида.

Дано

$$p_m = 1,0 \text{ А} \cdot \text{м}^2;$$

$$l = 0,40 \text{ м}.$$

$$\Phi = ?$$

Решение

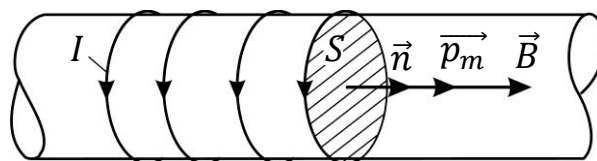


Рис.76

Магнитный поток через сечение площадью S в однородном магнитном поле соленоида определяется формулой

$$\Phi = B_n S, \quad (1)$$

где B_n – проекция вектора магнитной индукции \vec{B} на нормаль \vec{n} к площади поперечного сечения сердечника соленоида (рис. 76); S – площадь этого сечения, равная площади витка обмотки соленоида.

Вектор магнитной индукции поля внутри соленоида параллелен его оси, следовательно, проекция вектора $B_n = B$, где величина

индукции магнитного поля в средней части соленоида определяется по следующей формуле:

$$B = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I. \quad (2)$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость сердечника, для воздуха $\mu \approx 1$; N – число витков соленоида; l – его длина; I – сила тока в обмотке соленоида.

Подставляя величину магнитной индукции B в формулу (1), находим магнитный поток в сечении соленоида

$$\Phi = \mu_0 \mu \frac{NIS}{l}. \quad (3)$$

Магнитный момент соленоида \vec{p}_m – это вектор, равный сумме магнитных моментов \vec{p}_m всех N витков соленоида:

$$\vec{p}_m = \sum_1^N \vec{p}_{m1} = N\vec{p}_{m1}, \quad (4)$$

где \vec{p}_{m1} – магнитный момент одного витка обмотки; здесь сумму одинаковых слагаемых \vec{p}_m заменили произведением. Так как модуль $p_{m1} = IS$, то магнитный момент соленоида, в соответствии с формулой (4):

$$p_m = NIS. \quad (5)$$

Сравнивая формулы (5) и (3), отметим, что магнитный поток соленоида пропорционален величине $(NIS) = p_m$, следовательно, формулу (3) можно записать в следующем виде:

$$\Phi = \mu_0 \mu \frac{p_m}{l}.$$

По этой формуле вычисляем магнитный поток сквозь сечение заданного соленоида:

$$\Phi = \frac{3,14 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2}{0,40 \text{ м}} = 0,79 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{А} = 0,79 \text{ мкВб}.$$

Задача 45. Круговой контур (виток) радиусом $R = 2$ см, в котором поддерживается постоянный ток $I = 50$ А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл. Какую работу нужно совершить для того, чтобы 1) повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$; 2) удалить виток в область, где магнитное поле отсутствует.

Дано

$$R = 2 \text{ см};$$

$$I = 50 \text{ А};$$

$$B = 10 \text{ мТл}.$$

$$1) A_1 - ? \quad \alpha = \frac{\pi}{6};$$

$$2) A_2 - ? \quad B = 0.$$

Решение

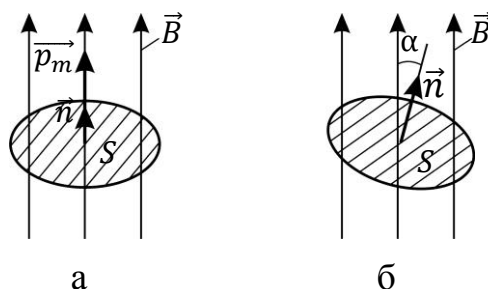


Рис. 77

Виток с током, который свободно установился в магнитном поле, находится в состоянии устойчивого равновесия. При этом механический момент $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = 0$, поэтому магнитный момент контура $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$, чтобы $\sin \alpha = 0$. Магнитный момент \vec{p}_m сонаправлен с нормалью \vec{n} к плоскости контура, следовательно, нормаль $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$ (рис. 77 а).

В этом начальном положении магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, максимален и равен

$$\Phi_1 = B_n S = BS, \quad (1)$$

так как $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$ и проекция вектора магнитной индукции $B_n = B$.

1) При повороте плоскости контура на угол α и нормаль к этой плоскости повернется на угол α (рис. 77 б). Магнитный поток при этом уменьшится и в новом положении контура станет равным

$$\Phi_2 = B_n S = BS \cos \alpha. \quad (2)$$

Работу, совершаемую при повороте контура, определим по формуле:

$$A = I (\Phi_2 - \Phi_1), \quad (3)$$

где I – ток в контуре; Φ_2 и Φ_1 – магнитные потоки сквозь поверхность, ограниченную контуром, соответственно, в конечном (индекс 2) и в начальном (индекс 1) положениях контура. Подставляя значения Φ_1 и Φ_2 по формулам (1) и (2), в которых площадь кругового контура $S = \pi R^2$, получаем следующую расчетную формулу для величины работы:

$$A_1 = \pi I B R^2 (\cos \alpha - 1). \quad (4)$$

Вычисляем величину работы, которая совершается при повороте контура:

$$A_1 = 3,14 \cdot 50 \text{ А} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ Тл} \cdot 2^2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = -0,85 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

2) После удаления контура с током в область, где индукция магнитного поля $B = 0$, магнитный поток $\Phi_2 = B_n S$ станет нулевым. Соответственно, работа, определяемая также формулой (3), запишется в следующем виде:

$$A_2 = I (0 - \Phi_1) = -I \Phi_1 = -\pi I B R^2.$$

Вычислим эту работу, совершаемую при удалении контура с током в область, где магнитное поле отсутствует:

$$A_2 = -\frac{A_1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)} = -6,3 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} = -0,63 \text{ мДж}.$$

Работа, совершаемая при перемещении контура, в обоих случаях отрицательная. Это означает, что работу совершает внешняя сила \vec{F}' , направленная противоположно силе Ампера (в случае A_2); а в первом случае – при повороте контура, работу совершает момент внешней силы $\vec{M}' \uparrow\downarrow \vec{M}$, который создается магнитными силами.

Задача 46. В одной плоскости с длинным прямым проводником с током $I_1 = 20$ А расположена квадратная рамка со стороной $a = 5$ см так, что расстояние от провода до ближайшей стороны рамки $r_0 = a$ (рис. 78). В рамке течет ток $I_2 = 5$ А. Определите работу, которую нужно совершить для медленного поворота рамки относительно оси z на угол $\varphi = \pi$.

Дано

$I_1 = 20$ А;
 $a = 0,05$ м;
 $r_0 = a$;
 $I_2 = 5$ А;
 $\varphi = \pi$.
 $A = ?$

Решение

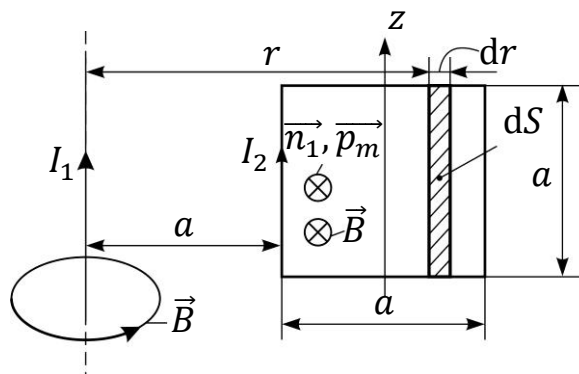


Рис. 78

При *медленном повороте* рамки скорость изменения магнитного потока $\frac{d\Phi}{dt}$ мала, поэтому величиной ЭДС индукции и возникающим в рамке индукционным током можно пренебречь и считать постоянной величину тока в рамке: $I_2 = \text{const}$. В таком случае работа при повороте контура описывается формулой

$$A = I_2(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (1)$$

где Φ_2 и Φ_1 – магнитный поток через площадь, ограниченную рамкой, в конечном и начальном положениях рамки.

Магнитный поток через площадь рамки создается магнитным полем длинного проводника с током I_1 . Магнитная индукция этого поля в точках на расстоянии r от провода определяется следующей формулой:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}. \quad (2)$$

По этой формуле видно, что величина B уменьшается по мере увеличения расстояния r от провода, следовательно, магнитное поле, в котором находится рамка, является *неоднородным*. Линии магнитной индукции \vec{B} – окружности, охватывающие длинный проводник, они перпендикулярны плоскости рамки и вектор \vec{B} направлен «от нас». Нормаль \vec{n}_1 к плоскости рамки, как принято, связана правилом буравчика с током I_2 в рамке и также направлена «от нас» (см. рис. 78). В этом случае проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n}_1 положительна и равна модулю вектора \vec{B} :

$$B_{n_1} = B. \quad (3)$$

Для вычисления магнитного потока Φ_1 в начальном положении рамки отметим, что в неоднородном магнитном поле величину Φ находят как сумму элементарных потоков $d\Phi$ через бесконечно малые площадки dS :

$$\Phi = \int_0^\Phi d\Phi = \int_S B_n dS. \quad (4)$$

Элементарные площадки dS выберем в форме узких полосок ширины dr и площадью $dS = a \cdot dr$, параллельных длинному проводнику и находящихся от него на расстоянии, равном r (см. рис. 78). В пределах такой полоски величину B , определяемую формулой (2), можно считать одинаковой. Подставляя значение проекции B_{n_1} с учетом формулы (2) в выражение (4), рассчитаем магнитный поток в начальном положении рамки следующим образом:

$$\Phi_1 = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 \mu I_1 a}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 \mu I_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{2a}{a}\right). \quad (5)$$

Здесь пределы интегрирования по переменной r взяты соответственно a и $2a$, чтобы охватить всю площадь рамки, по которой суммируются элементарные магнитные потоки $d\Phi$.

После поворота плоскости рамки относительно оси z на угол $\varphi = \pi$ рамка вновь будет расположена в плоскости рисунка, но только вектор нормали к плоскости рамки, повернувшись также на угол, равный π , будет направлен «к нам», т. е. нормаль $\vec{n}_2 \uparrow \vec{B}$. В таком положении рамки проекция вектора \vec{B} на нормаль отрицательна:

$$B_{n_2} = -B. \quad (6)$$

Соответственно, магнитный поток в конечном положении рамки, определяемый интегралами (4) и (5), будет отличаться от величины Φ_1 только знаком:

$$\Phi_2 = -\Phi_1. \quad (7)$$

С учетом выражений (5) и (7) формула (1) для вычисления работы преобразуется к следующему виду:

$$A = -I_2 \cdot 2 \Phi_1 = -\frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 a}{\pi} \ln 2. \quad (8)$$

Вычисляем величину работы при повороте рамки по расчетной формуле (8), принимая для воздуха магнитную проницаемость $\mu \approx 1$:

$$A = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 20 \text{ А} \cdot 5 \text{ А} \cdot 0,05 \text{ м}}{\pi} \ln 2 = -2 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = -2 \text{ мкДж}.$$

Величина работы отрицательна, так как поворот совершается моментом внешних сил, поворачивающим рамку из положения устойчивого равновесия: в начальном положении рамки ее магнитный момент $\vec{p}_m \uparrow \vec{n}_1 \uparrow \vec{B}$.

9.5 Явление электромагнитной индукции. Индуктивность цепи. Энергия магнитного поля

План решения задач

1. При анализе явления *электромагнитной индукции* (ЭМИ) в каждой конкретной задаче необходимо выяснять причину появления ЭДС индукции \mathcal{E}_i и индукционного тока. Согласно закону Фарадея: $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$, – причиной появления ЭДС индукции является изменение магнитного потока $\Phi = \int_S B_n dS$. Изменение магнитного потока может выполняться различными способами: а) изменением площади контура S или площади S , которую описывает проводник при движении в магнитном поле; б) изменением проекции B_n вектора магнитной индукции путем поворота контура; в) изменением величины магнитной индукции B при перемещении постоянного магнита относительно контура или посредством изменения тока, создающего магнитное поле с индукцией B , и другими способами. Определение конкретной причины появления ЭДС индукции и индукционного тока позволяет определить его направление.

2. Направление индукционного тока в замкнутом проводнике определяют с помощью правила Ленца: *индукционный ток I_i своим магнитным полем $B_i = f(I_i)$ препятствует причине своего появления, т. е. тому изменению магнитного потока Φ , которое вызвало появление ЭДС индукции и индукционного тока.* Например, если магнитный поток Φ через площадь контура снижается, то магнитное поле индукционного тока \vec{B} стремится поддержать неизменным магнитный поток, а для этого будет $\vec{B} \uparrow \vec{B}_n$, – нормальной составляющей магнитной индукции, которая снижается. Правило Ленца трактуется и в более широком смысле: если причиной возникновения индукционного тока явилось движение магнита относительно проводящего контура или движение проводника в магнитном поле, то индукционный ток будет препятствовать движению, т. е. тормозить движущийся проводник путем отталкивания одноименных магнитных полюсов магнитных полей $\vec{B}_{\text{внеш}}$ и \vec{B} . Другой пример проявления правила Ленца наблюдаем в *явлении самоиндукции*: если ток в катушке индуктивности возрастает, например, при подключении в контур источника ЭДС, то при этом увеличивается собственное потокоцепление катушки; следовательно, индукционный ток I_i будет направлен противоположно току от внешнего источника ЭДС, чтобы препятствовать возрастанию тока; и наоборот, – при снижении тока в катушке индуктивности в ней появится индукционный ток I_i , сонаправленный снижающемуся току I .

3. Отметим, что если *движение проводника равномерное*, то скорость изменения магнитного потока постоянна: $\frac{d\Phi}{dt} = \text{const}$. В этом случае

справедливо равенство $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ и для определения ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ можно взять изменение магнитного потока $\Delta\phi$ за конечный промежуток времени Δt (см. задачу 47).

Задача 47. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Тл равномерно с частотой $n = 10 \text{ с}^{-1}$ вращается медный стержень длиной $l = 40$ см так, что плоскость его вращения перпендикулярна линиям магнитной индукции, а ось вращения проходит через один из концов стержня. Определите разность потенциалов U на концах стержня.

Дано

$B = 0,2$ Тл;
 $n = 10 \text{ с}^{-1}$;
 $l = 0,40$ м.
 $U = ?$

Решение

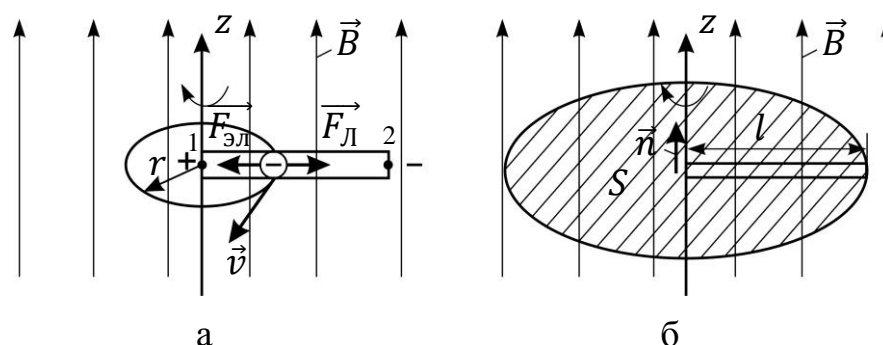


Рис. 79

Данную задачу можно решить одним из двух следующих способов.

Первый способ

В металлическом стержне имеются свободные электроны; рассмотрим один из них, движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле (рис. 79 а). На электрон действует сила Лоренца: $\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B}$, где e – заряд электрона; \vec{v} – линейная скорость его движения по окружности радиусом r :

$$v = \omega r = 2\pi n r.$$

Модуль силы Лоренца

$$F_L = evB \sin 90^\circ = 2\pi enrB. \tag{1}$$

Направление силы Лоренца определим по правилу левой руки, располагая ладонь перпендикулярно плоскости рисунка. Полученное направление вектора силы, которая действовала бы на положительный заряд, изменяем на противоположное, так как электрон имеет отрицательный заряд. Силой Лоренца свободные электроны смещаются к точке 2 на конце стержня, удаленном от оси вращения (см. рис. 79 а). На другом конце стержня – в точке 1, вследствие недостатка свободных электронов, имеется избыточный положительный заряд ионов кристаллической решетки металла.

Избыточные заряды, сосредоточенные на концах стержня, создают электрическое поле с напряженностью \vec{E} , направленной вдоль стержня. Это поле действует на свободные электроны электрической силой

$$\vec{F}_{эл} = e\vec{E}, \quad (2)$$

величина которой возрастает по мере накопления избыточных зарядов на концах стержня. Направление электрической силы противоположно силе Лоренца: $\vec{F}_{эл} \updownarrow \vec{F}_Л$ (см. рис. 79 а). Поэтому через достаточно малое время ($t \leq 10^{-8}$ с) сумма этих сил ($\vec{F}_{эл} + \vec{F}_Л$) станет равна нулю и направленное движение электронов к концу вращающегося стержня прекратится. При этом на его концах будут находиться индуцированные заряды определенной величины и установится постоянная разность потенциалов между концами стержня: $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = U$.

Запишем условие статического равновесия свободных электронов в металлическом стержне – $(\vec{F}_{эл} + \vec{F}_Л) = 0$, которое означает равенство модулей этих сил:

$$F_{эл} = F_Л, \text{ или } eE = evB; \rightarrow E = 2\pi nrB. \quad (3)$$

Напряженность электростатического поля E численно равна градиенту потенциала:

$$E = \frac{d\varphi}{dr}. \quad (4)$$

Приравняем значения напряженности E ЭСП в стержне по формулам (3) и (4) и выразим бесконечно малую разность потенциалов $d\varphi$ между точками стержня, находящимися на расстоянии dr друг от друга:

$$d\varphi = 2\pi nB r dr. \quad (5)$$

Определим разность потенциалов на концах стержня (между точками 1 и 2), суммируя элементарные значения $d\varphi$:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi = 2\pi nB \int_0^l r dr = \pi nBl^2. \quad (6)$$

Вычислим разность потенциалов на концах стержня по формуле (6):

$$U = 3,14 \cdot 10 \text{ с}^{-1} \cdot 0,2 \text{ Тл} \cdot 0,4^2 \text{ м}^2 = 1,0 \text{ В.}$$

Второй способ

Используем закон Фарадея для электромагнитной индукции – ЭДС индукции \mathcal{E}_i равна скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (7)$$

где Φ – магнитный поток через поверхность, которую описывает стержень при вращении:

$$\Phi = B_n S. \quad (8)$$

Здесь проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к описанной площади круга $B_n = B$, так как вектор $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{n}$ (рис. 79 б).

Стержень вращается равномерно, поэтому закон Фарадея (7) примет следующий вид:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi}{T}. \quad (9)$$

Здесь T – период вращения стержня: $T = \frac{1}{n}$; промежуток времени $\Delta t = T$ удобен тем, что стержень, совершая за период один оборот, описывает поверхность в форме круга площадью $S = \pi l^2$ (см. рис. 79 б). С учетом этих замечаний и формулы (8) запишем закон ЭМИ (9) в виде:

$$\mathcal{E}_i = -\pi n B l^2. \quad (10)$$

Так как стержень, в котором имеется ЭДС индукции, является неоднородным участком электрической цепи, запишем для него закон Ома в следующем виде:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_i}{R}. \quad (11)$$

При постоянной скорости вращения устанавливается постоянная разность потенциалов на концах стержня, а ток в стержне $I = 0$. Следовательно, согласно закону (11), получаем равенство

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = U = |\mathcal{E}_i|. \quad (12)$$

Учитывая выражение (10) для ЭДС индукции, преобразуем последнюю формулу в расчетную формулу разности потенциалов на концах стержня:

$$U = \pi n B l^2.$$

Эта формула совпадает с формулой, полученной выше первым способом.

Отметим, что первый способ позволил определить полярность напряжения (знаки потенциалов φ_1^+ и φ_2^-), так как в нем рассмотрен механизм появления индуцированных зарядов на концах стержня посредством действия силы Лоренца на движущиеся со стержнем свободные электроны. Эта сила является сторонней силой $\vec{F}_{\text{стор}}$, благодаря действию которой возникает ЭДС индукции: $\mathcal{E}_i = \frac{1}{e} \int_1^2 \vec{F}_{\text{стор}} \cdot d\vec{r}$.

Задача 48. Рамка, содержащая $N = 500$ витков площадью $S = 100 \text{ см}^2$, вращается с частотой $n = 20 \text{ с}^{-1}$ относительно оси z , совпадающей с диаметром рамки. Рамка находится в однородном поле с магнитной индукцией $B = 0,4 \text{ Тл}$, которая направлена перпендикулярно оси вращения. Определите закон изменения ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = f(t)$, максимальное значение ЭДС индукции \mathcal{E}_{max} и направление индукционного тока I_i в момент времени t , соответствующий положению рамки, показанному на рис. 80.

Дано

$$N = 500 \text{ витков};$$

$$S = 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$n = 20 \text{ с}^{-1};$$

$$B = 0,4 \text{ Тл.}$$

$$\mathcal{E}_i = f(t) - ? \quad \mathcal{E}_{\max} - ?$$

Направление $I_i - ?$

Решение

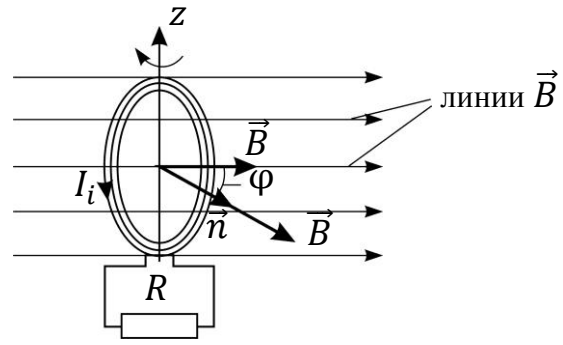


Рис. 80

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ плоскость рамки была перпендикулярна линиям магнитного поля, а вектор $\vec{B} \uparrow \vec{n}$ – нормали к плоскости рамки. Вращение рамки с постоянной частотой n и с угловой скоростью $\omega = 2\pi n = \text{const}$ – равномерное. При этом угол поворота φ нормали \vec{n} (см. рис. 80) изменяется с течением времени по закону $\varphi = \omega t$. Соответственно изменяется проекция на нормаль вектора магнитной индукции:

$$B_n = B \cos \varphi = B \cos \omega t, \quad (1)$$

и полный магнитный поток через витки рамки, или потокосцепление ψ :

$$\psi = N\Phi = NB_n S = NBS \cos \omega t. \quad (2)$$

Электродвижущая сила индукции \mathcal{E}_i , возникающая в рамке при изменении ее потокосцепления по закону (2), определяется законом Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\psi}{dt} = -NBS\omega(-\sin \omega t), \text{ или } \mathcal{E}_i = NBS\omega \sin \omega t. \quad (3)$$

Согласно полученному уравнению (3), ЭДС индукции изменяется с течением времени по гармоническому закону.

Максимальное значение ЭДС индукции \mathcal{E}_{\max} – амплитуда колебаний величины ЭДС, достигается периодически при $\sin \omega t = 1$ и, как следует из уравнения (3), определяется формулой

$$\mathcal{E}_{\max} = NBS\omega = 2\pi nNBS. \quad (4)$$

Вычислим величину \mathcal{E}_{\max} :

$$\mathcal{E}_{\max} = 2 \cdot 3,14 \cdot 20 \text{ с}^{-1} \cdot 500 \cdot 0,4 \text{ Тл} \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 251 \text{ В.}$$

Если рамку замкнуть на внешнее сопротивление R , то в ней потечет индукционный ток. К моменту времени t , как показано на рис. 80, рамка и нормаль к ней повернулись на угол φ от начального положения нормали, в котором угол $\varphi_0 = 0$, а проекция $B_n = B$ и потокосцепление ψ_0 были максимальными. Согласно уравнению (2), величина потокосцепления $\psi = (\psi_0 \cos \varphi) < \psi_0$. Это уменьшение магнитного потока приведет к возникновению индукционного тока I_i . Направление этого тока таково, чтобы создаваемое им магнитное поле с индукцией B препятствовало бы уменьшению величин B_n и потокосцепления ψ . Для этого необходимо,

чтобы вектор $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{B}_n$; покажем на рис. 80 такой вектор \vec{B} . Направление индукционного тока и создаваемое им магнитное поле \vec{B} связаны правилом буравчика; ток I_i будет направлен против часовой стрелки.

Через четверть периода вращения рамки угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и величина $\psi = 0$. В течение второй четверти периода поворота рамки потокосцепление ψ будет увеличиваться. Поле индукционного тока \vec{B} , препятствующее этому увеличению, имеет направление $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{B}_n$ (это $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{B}$), т. е. вектор \vec{B} останется сонаправленным с нормалью \vec{n} , так как индукция внешнего магнитного поля $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{n}$. В третьей четверти периода будет уменьшаться вектор $\vec{B}_n \uparrow\uparrow \vec{B}$, при этом установится $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{B}$ (согласно правилу Ленца), а индукционный ток изменит свое направление на противоположное. В связи с этим заметим, что согласно рассмотренной модели работает промышленный генератор переменного тока.

Задача 49. Проводящий стержень длиной $l = 0,5$ м находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл. Концы стержня замкнуты проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи $R = 0,2$ Ом. Определите направление индукционного тока и мощность P , необходимую для равномерного движения стержня со скоростью $v = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, направленной перпендикулярно линиям магнитной индукции.

Дано

$$l = 0,5 \text{ м};$$

$$B = 0,4 \text{ Тл};$$

$$R = 0,2 \text{ Ом};$$

$$v = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\vec{v} \perp \vec{B}.$$

Направление I_i — ?

P — ?

Решение

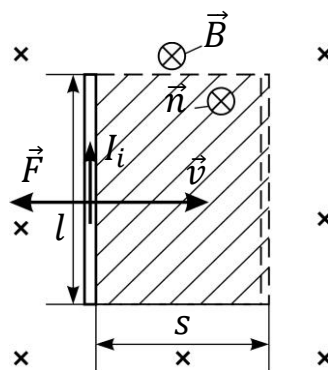


Рис. 81

При движении стержень пересекает линии магнитной индукции, и через площадь прямоугольника S , описанную проводником (рис. 81), имеется магнитный поток

$$\Phi = B_n S = BS, \quad (1)$$

где проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к площадке S равна $B_n = B$, так как вектор $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{n}$; площадь $S = l \cdot s = lvt$, увеличивается с течением времени t движения стержня и соответственно, согласно формуле (1), увеличивается магнитный поток Φ . Поэтому в стержне возникает ЭДС индукции, равная скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} = -B \frac{ds}{dt} = -Blv. \quad (2)$$

Модуль этой ЭДС $|\mathcal{E}_i| = Blv$, а в замкнутой цепи сопротивлением R протекает индукционный ток, величина которого, согласно закону Ома:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Blv}{R}. \quad (3)$$

Направление индукционного тока I_i определим по правилу Ленца. Поскольку причина появления тока I_i – движение стержня, то направление тока будет таким, чтобы препятствовать движению путем торможения стержня силой Ампера: $\vec{F} = \int_0^l I_i d\vec{l} \times \vec{B}$, – действующей на стержень с индукционным током. Покажем на рис. 81 тормозящую силу, как вектор $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{v}$, и по правилу левой руки, размещая ладонь в плоскости рисунка, определим направление индукционного тока I_i , соответствующее указанной силе Ампера \vec{F} (см. рис. 81).

Мощность P , необходимую для движения стержня с постоянной скоростью v , при которой ЭДС индукции и индукционный ток, согласно формулам (2) и (3), постоянны, найдем по закону Джоуля – Ленца:

$$P = I_i^2 R. \quad (4)$$

С учетом закона Ома (3) получаем расчетную формулу мощности:

$$P = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} = \frac{(Blv)^2}{R}. \quad (5)$$

Вычисляем величину мощности

$$P = \frac{(0,4 \text{ Тл} \cdot 0,5 \text{ м} \cdot 20 \frac{\text{м}}{\text{с}})^2}{0,2 \text{ Ом}} = 80 \text{ Вт}.$$

Задача 50. В проволочное кольцо, подключенное к интегратору тока (ИТ) (рис. 82), вставили прямой магнит. При этом по цепи сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$ прошел заряд $Q = 100 \text{ мкКл}$. Покажите направление индукционного тока I_i в кольце и определите магнитный поток ϕ через площадь кольца.

Дано

$$R = 10 \text{ Ом};$$

$$Q = 100 \text{ мкКл}.$$

Направление I_i – ?

ϕ – ?

Решение

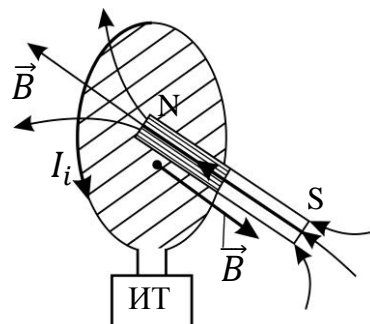


Рис. 82

При внесении магнита линии магнитной индукции \vec{B} , создаваемой магнитом, пересекают площадь, ограниченную кольцом, и создают

магнитный поток Φ через эту площадь. Увеличение магнитного потока от начального значения $\Phi_0 = 0$ до величины Φ приводит к появлению ЭДС индукции \mathcal{E}_i в кольце, которая определяется законом Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

В замкнутой цепи сопротивлением R протекает индукционный ток I_i , величина которого, в соответствии с законом Ома:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}. \quad (2)$$

Протекающий в кольце индукционный ток переносит в цепи за время dt элементарный заряд dQ – через поперечное сечение проволоки и через интегратор тока. Сила тока, согласно определительной формуле:

$$I_i = \frac{dQ}{dt}. \quad (3)$$

В интеграторе тока суммируются элементарные заряды dQ за все время протекания тока от $t = 0$ до $t \rightarrow \infty$:

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_0^\infty I_i dt. \quad (4)$$

Преобразуем подинтегральное выражение (4) с учетом формул (2) и (3):

$$Q = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}_i}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_0}^\Phi \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{\Phi_0 - \Phi}{R} = -\frac{\Phi}{R}. \quad (5)$$

В соответствии с полученным выражением (5) записываем расчетную формулу магнитного потока через площадь кольца:

$$|\Phi| = QR.$$

Вычисляем величину магнитного потока

$$\Phi = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Кл} \cdot 10 \text{ Ом} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Вб} = 1 \text{ мВб}.$$

Определим направление индукционного тока I_i . В момент внесения магнита в кольцо увеличивается магнитный поток от нуля до некоторого значения Φ . При этом индукционный ток, согласно правилу Ленца, будет препятствовать увеличению потока Φ магнитным полем $B = f(I_i)$, создаваемым этим током. Чтобы уменьшать результирующее поле $\vec{B}_{\text{рез}} = \vec{B} + \vec{B}$, и тем самым уменьшать магнитный поток Φ , следует быть направлению $\vec{B} \updownarrow \vec{B}$ магнита. Покажем на рис. 82 направление $\vec{B} \updownarrow \vec{B}$ магнита, а затем, в соответствии с правилом буравчика, направим индукционный ток I_i в кольце – против часовой стрелки.

Задача 51. Кольцо массой $m = 5$ г из медной проволоки расположено в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл так, что плоскость кольца составляет угол $\varphi = 30^\circ$ с линиями магнитной индукции. Покажите направление индукционного тока I_i и определите заряд Q , который пройдет по кольцу, если снять магнитное поле.

Дано

$$\begin{aligned}
 m &= 5 \text{ г;} \\
 \rho_m &= 8,93 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \\
 \rho &= 17 \text{ нОм} \cdot \text{м}; \\
 B &= 0,5 \text{ Тл}; \\
 \varphi &= 30^\circ.
 \end{aligned}$$

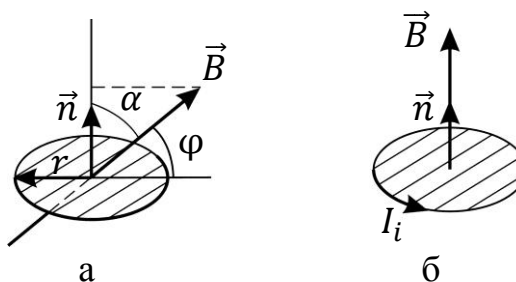
Решение

Рис. 83

Направление I_i – ? Линии магнитной индукции однородного магнитного поля, пронизывая площадь круга S , ограниченную кольцом, создают магнитный поток Φ_1 , определяемый формулой:

$$\Phi_1 = B_n S. \quad (1)$$

Здесь B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к площадке S ; величина $S = \pi r^2$, где r – радиус кольца. Проекция вектора \vec{B} , согласно рис. 83 а:

$$B_n = B \cos \alpha = B \cos(90^\circ - \varphi) = B \sin \varphi. \quad (2)$$

С учетом этого магнитный поток, определяемый формулой (1) запишется в виде:

$$\Phi_1 = \pi r^2 B \sin \varphi. \quad (3)$$

Если снять магнитное поле, например, отключив ток в обмотке электромагнита, то магнитный поток уменьшится до нуля: $\Phi_2 = 0$. При уменьшении магнитного потока в кольце индуцируется ЭДС \mathcal{E}_i , величина которой, согласно закону Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4)$$

В замкнутом кольце потечет индукционный ток I_i , величина которого определяется законом Ома:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}, \quad (5)$$

где R – сопротивление проволочного кольца длиной $l = 2\pi r$ и площадью сечения проволоки S_1 . Величина сопротивления определяется формулой

$$R = \rho \frac{l}{S_1}. \quad (6)$$

При протекании индукционного тока по кольцу переносится заряд величиной dQ за время dt :

$$I_i = \frac{dQ}{dt}. \quad (7)$$

Весь заряд Q , который пройдет по кольцу, найдем, суммируя элементарные заряды dQ за все время протекания тока:

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_0^\infty I_i dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon_i}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{\Phi_1}{R}. \quad (8)$$

С учетом формул (3) и (6) формула (8) для определения заряда принимает следующий вид:

$$Q = \frac{\pi r^2 B \sin \varphi S_1}{\rho_m 2\pi r}. \quad (9)$$

Размеры кольца – длина l , радиус r , а также площадь сечения проволоки S_1 связаны с массой кольца m , его объемом V и плотностью меди ρ_m следующими соотношениями:

$$m = \rho_m V = \rho_m l S_1 = \rho_m 2\pi r S_1; \rightarrow S_1 = \frac{m}{\rho_m 2\pi r}.$$

Подставляя величину S_1 в формулу (9), получаем следующую расчетную формулу искомой величины заряда:

$$Q = \frac{\pi r^2 B \sin \varphi m}{\rho_m (2\pi)^2 r^2} = \frac{B m \sin \varphi}{4\pi \rho_m}. \quad (10)$$

Проверим полученную формулу по единицам величин, в нее входящих:

$$[Q] = \frac{1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ кг}}{1 \text{ Ом} \cdot \text{м} \cdot 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 1 \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{Ом}} = 1 \frac{\text{Вб}}{\text{Ом}} = \frac{[\Phi]}{[R]} = 1 \text{ Кл}.$$

Вычислим по формуле (10) заряд, прошедший по кольцу при снятии магнитного поля:

$$Q = \frac{0,5 \text{ Тл} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 0,5}{4 \cdot 3,14 \cdot 17 \cdot 10^{-9} \text{ Ом} \cdot \text{м} \cdot 8,93 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 0,65 \text{ Кл}.$$

Определим направление индукционного тока по правилу Ленца. При уменьшении величины магнитной индукции \vec{B} и проекции вектора B_n индукционный ток I_i будет препятствовать этому уменьшению, создавая магнитное поле с индукцией $\vec{B} \uparrow \vec{B}_n$ (рис. 83 б), чтобы сохранить прежний магнитный поток. Покажем на рисунке вектор $\vec{B} \uparrow \vec{B}_n$ и по правилу буравчика определим направление индукционного тока в кольце: он течет против часовой стрелки, если смотреть на кольцо сверху.

Задача 52. Соленоид, имеющий сердечник площадью сечения $S = 5 \text{ см}^2$ и обмотку, содержащую $N = 10^3$ витков, при токе $I = 10 \text{ А}$ создает внутри сердечника магнитное поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$. Определите индуктивность L соленоида и энергию W его магнитного поля.

Дано

$$S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$N = 10^3 \text{ витков};$$

$$I = 10 \text{ А};$$

$$B = 0,1 \text{ Тл}.$$

Решение

$L - ?$ $W - ?$ Индуктивность соленоида L характеризует его способность создавать собственный магнитный поток ψ . Индуктивность L является коэффициентом пропорциональности между потокоцеплением ψ соленоида и током I в его обмотке:

$$\psi = LI. \quad (1)$$

Формулу (1) используем для расчета индуктивности; с этой целью определим потокоцепление соленоида:

$$\psi = N\phi = NB_n S. \quad (2)$$

Здесь B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к сечению S , ее величина $B_n = B$. Определяем индуктивность соленоида L из формулы (1) с учетом формулы (2) для потокоцепления ψ :

$$L = \frac{\psi}{I}; \rightarrow L = \frac{NBS}{I}. \quad (3)$$

Вычисляем индуктивность заданного соленоида:

$$L = \frac{10^3 \cdot 0,1 \text{ Тл} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{10 \text{ А}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 5 \text{ мГн}.$$

Энергию магнитного поля соленоида с током I в его обмотке определяем по следующей формуле:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (4)$$

Вычисляем величину энергии магнитного поля соленоида:

$$W = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \cdot 10^2 \text{ А}^2}{2} = 0,25 \text{ Дж}.$$

Задача 53. Электрическая цепь, схема которой приведена на рис. 84, содержит катушку индуктивностью $L = 0,2$ Гн и сопротивлением $R_1 = 2$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 1$ кОм. В цепи течет ток $I = 10$ А. Определите силу тока I_1 в катушке и I_2 – в резисторе в трех случаях: 1) до размыкания цепи, 2) в момент размыкания ($t_1 = 0$), 3) через $t_2 = 1$ мс после размыкания. Покажите направление индукционного тока в цепи после размыкания. Сопротивлением источника тока можно пренебречь.

Дано

$$L = 0,2 \text{ Гн};$$

$$R_1 = 2 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 1 \text{ кОм};$$

$$I = 10 \text{ А}.$$

Решение

$I_1 - ?$ $I_2 - ?$ В трех случаях:

1) ключ К замкнут;

2) $t_1 = 0$; 3) $t_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ с.

Направление I_i – ?

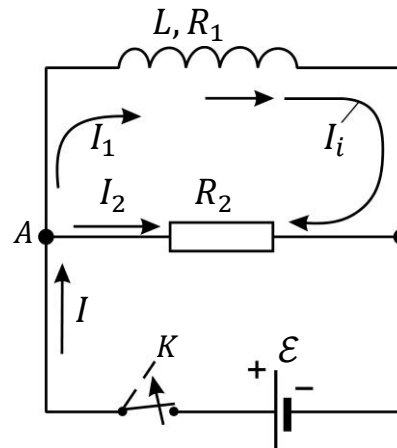


Рис. 84

Катушка и параллельно соединенный с ней резистор подключены к источнику тока. Потребляемый от источника ток в узле А (см. рис. 84) разветвляется на два, удовлетворяющих первому правилу Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2. \quad (1)$$

Чтобы найти токи I_1 и I_2 , запишем второе правило Кирхгофа для двух контуров, содержащих а) катушку и источник тока: $I_1 R_1 = \mathcal{E}$, б) резистор и источник тока: $I_2 R_2 = \mathcal{E}$. Приравнявая последние уравнения, находим соотношение токов:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), определяем токи I_1 и I_2 до размыкания цепи ключом K :

$$I = I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right); \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2}. \quad (3)$$

Вычисляем силу тока в ветвях до размыкания цепи:

а) через резистор: $I_2 = \frac{2 \text{ Ом} \cdot 10 \text{ А}}{(1000 + 2) \text{ Ом}} = 0,02 \text{ А};$

б) через катушку: $I_1 = I - I_2 = (10 - 0,02) \text{ А} = 9,98 \text{ А}.$

2) После отключения источника тока размыканием ключа K в замкнутом контуре, содержащем катушку индуктивностью L и резистор, ток снижается. Следовательно, в катушке возникает ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s , которая в случае постоянной индуктивности L определяется формулой:

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4)$$

Ток в контуре, создаваемый этой ЭДС, определяется законом Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}_s}{R}; \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_s = IR. \quad (5)$$

Здесь $R = (R_1 + R_2)$ – сопротивление контура, в котором катушка и резистор соединены последовательно. Величина $R \approx R_2$, так как первым слагаемым в формуле можно пренебречь из-за его малости: $R_1 \ll R_2$.

Ток в контуре $I_1 = I_2 = I$ – это индукционный ток I_i . Его направление определяем по правилу Ленца: так как ток I_1 в катушке снижается (что приводит к снижению магнитного потока), то индукционный ток, препятствуя этому снижению, будет направлен так же, как и снижающийся ток I_1 (см. рис. 84). При этом ток через резистор изменит направление на противоположное тому, которое было с подключенным источником тока.

Найдем силу индукционного тока I , как функцию времени t . Для этого приравняем величину ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s по формулам (4) и (5):

$$IR = -L \frac{dI}{dt}. \quad (6)$$

Это простое дифференциальное уравнение решаем, разделяя переменные:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Интегрируем равенство со следующими пределами: от тока в катушке $I_0 = I_1$ в начальный момент времени $t = 0$ до тока I – в произвольный момент времени t :

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt; \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L} t.$$

Потенцируя это уравнение, получаем закон изменения индукционного тока в цепи с течением времени t от момента отключения источника тока:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right). \quad (7)$$

Согласно уравнению (7), в момент размыкания цепи ($t_1 = 0$) ток в цепи, протекающий через катушку и резистор:

$$I(t_1) = I_0 = I_1 = 9,98 \text{ А.}$$

Ток в момент времени $t_2 = 1$ мс вычисляем по уравнению (7):

$$I(t_2) = I_0 \exp\left(-\frac{1002 \text{ Ом} \cdot 10^{-3} \text{ с}}{0,2 \text{ Гн}}\right) = 9,98 \text{ А} \cdot e^{-5} = 0,067 \text{ А.}$$

Таким образом, экстраток самоиндукции I_i в начальный момент времени совпадает с током в катушке, а для высокоомного сопротивления R_2 этот индукционный ток в $\frac{9,98 \text{ А}}{0,02 \text{ А}} \approx 500$ раз превышает «рабочий ток» I_2 от источника тока. Даже спустя 1 мс после размыкания ключа I_i примерно в 3 раза больше, чем I_2 . В результате протекания индукционного тока в катушке и в резисторе выделяется тепловая энергия, равная энергии магнитного поля катушки до размыкания ключа:

$$W_{\text{тепл}} = W_{\text{магн}} = \frac{L(I_1)^2}{2} = \frac{0,2 \text{ Гн} \cdot (9,98 \text{ А})^2}{2} \approx 10 \text{ Дж.}$$

Задача 54. Катушку сопротивлением $R = 10$ Ом замкнули на источник тока. Через время $t = 0,1$ с от момента замыкания сила тока в катушке достигла $0,90I_0$ – предельного значения. Определите индуктивность катушки L и укажите направление индукционного тока в цепи.

Дано

$$R = 10 \text{ Ом};$$

$$t = 0,1 \text{ с};$$

$$I(t) = 0,90 I_0.$$

$L - ?$

Направление $I_i - ?$

Решение

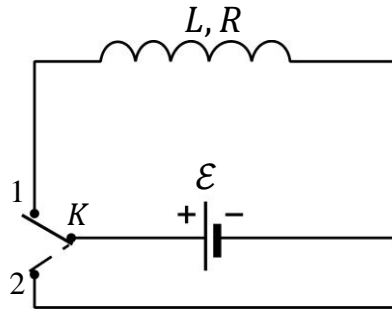


Рис. 85

При замыкании катушки ключом K на источник тока с ЭДС \mathcal{E} (рис. 85) ток в катушке увеличивается, создавая в ней магнитное поле, и потокосцепление катушки возрастает. В результате изменения тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s , которая изменяется с течением времени, согласно закону электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (1)$$

ЭДС самоиндукции создает в цепи индукционный ток I_i , направление которого определим по правилу Ленца. Этот индукционный ток будет препятствовать нарастанию тока в цепи (и потокосцепления катушки), следовательно, он направлен противоположно току I от источника тока. Вследствие этого, ток в цепи, в соответствии с законом Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_s}{R}, \text{ или } I = I_0 - I_i, \quad (2)$$

где I_0 – установившееся значение тока в цепи: когда индукционный ток I_i снизится до нуля, его величина

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (3)$$

Зависимость индукционного тока от времени можно найти, как и в решении предыдущей задачи, рассматривая отключение источника тока без размыкания цепи путем перевода ключа K из положения 1 в 2 (см. рис. 85). При этом в цепи протекает только индукционный ток $I = I_i$ и в соответствии с законом Ома (2):

$$I = \frac{\mathcal{E}_s}{R}; \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_s = IR. \quad (4)$$

Приравнявая значения ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s по уравнениям (1) и (4), получаем дифференциальное уравнение

$$-L \frac{dI}{dt} = IR.$$

Разделяя переменные, преобразуем это уравнение к виду:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Интегрируя: $\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$, получаем зависимость индукционного тока от времени в следующем виде:

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t; \quad \rightarrow \quad I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (5)$$

Найденное значение индукционного тока (в уравнении (5) $I \equiv I_i$) в виде $I_i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ подставим в закон Ома (2) и получим закон установления тока в катушке при подключении ее к источнику тока:

$$I = I_0 - I_0 e^{-\frac{R}{L}t}; \quad \rightarrow \quad I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (6)$$

Из этого уравнения видим, что $I_i = I_0$ при $t \rightarrow \infty$.

Чтобы определить индуктивность катушки L , преобразуем уравнение (6) следующим образом:

$$e^{-\frac{R}{L}t} = 1 - \frac{I}{I_0}.$$

Логарифмируя последнее равенство, получаем расчетную формулу для определения индуктивности катушки:

$$-\frac{R}{L}t = \ln\left(1 - \frac{I}{I_0}\right); \quad \rightarrow \quad L = -\frac{Rt}{\ln\left(1 - \frac{I}{I_0}\right)}. \quad (7)$$

Вычисляем величину индуктивности катушки:

$$L = -\frac{10 \text{ Ом} \cdot 0,1 \text{ с}}{\ln(1-0,9)} = 0,44 \text{ Гн}.$$

Заметим, что в решении данной задачи можно было найти зависимость тока от времени $I = f(t)$ в виде уравнения (6) путем составления дифференциального уравнения из уравнений (1) и (2), но в этом случае решение полученного дифференциального уравнения оказалось бы более сложным. Заметим также, что рассмотренный в задаче метод определения индуктивности катушки приемлем для измерения величин L контуров с большой индуктивностью – порядка 1 Гн и более.

9.6. Магнитное поле в веществе

План решения задач

1. При расчете магнитного поля катушки с ферромагнитным сердечником следует иметь в виду, что индукция магнитного поля B в таком сердечнике зависит от напряженности МП H . Причем, вид зависимости $B = f(H)$ для конкретного материала сердечника устанавливается экспериментально. Как правило, в справочной литературе и в задачниках по физике приводят графики зависимостей $B(H)$.

2. Чтобы воспользоваться такой зависимостью, вычисляют напряженность магнитного поля H , обычно, с помощью теоремы о циркуляции вектора \vec{H} . В правой части теоремы записывают сумму

токов, охватываемых контуром интегрирования L (вдоль которого определяется циркуляция), как число ампер-витков катушки NI . Это произведение числа витков N в обмотке катушки на силу тока I .

3. Магнитную проницаемость μ материала сердечника вычисляют по формуле связи величин B и H : $\mu = \frac{B}{\mu_0 H}$. Отметим, что величина магнитной проницаемости μ зависит не только от напряженности намагничивающего поля, но и от размеров и формы ферромагнитного сердечника. Для бесконечного (тороидального или кольцевого) сердечника величина μ наибольшая и достигает значений $10^3 - 10^5$. Поперечная прорезь в сердечнике приводит к существенному снижению его магнитной проницаемости.

Задача 55. Магнитный момент атома железа $p'_m = 2 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Оцените магнитный момент p_m железного бруска длиной $l = 5 \text{ см}$ и площадью сечения $S = 1 \text{ см}^2$, намагниченного до насыщения. Определите максимальный вращающий момент M_{max} , который действовал бы на такой железный брусок в магнитном поле с индукцией $B = 1,0 \text{ Тл}$.

Дано

$$p'_m = 2 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2;$$

$$l = 0,05 \text{ м};$$

$$S = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\rho = 7,88 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$M = 55,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}};$$

$$B = 1,0 \text{ Тл}.$$

$$p_m - ? \quad M_{\text{max}} - ?$$

Решение

Железный брусок, как и другие ферромагнетики, состоит из доменов. Домен – это область самопроизвольной намагниченности вещества, причем, в пределах домена векторы магнитных моментов всех атомов сонаправлены, т. е. каждый домен намагничен до насыщения. Размер домена порядка $(0,01 \dots 0,1) \text{ мм}$, число атомов вещества в таком домене $N \approx 10^{14}$. В размагниченном состоянии ферромагнетика магнитные моменты его доменов $\vec{p}_m^{\text{ДОМ}}$ имеют хаотическую ориентацию. Но во внешнем магнитном поле с индукцией \vec{B} на каждый домен, имеющий магнитный момент $\vec{p}_m^{\text{ДОМ}}$, действует механический (вращающий) момент $\vec{M} = \vec{p}_m^{\text{ДОМ}} \times \vec{B}$, модуль которого $M = p_m^{\text{ДОМ}} B \sin \alpha$. В результате поворота магнитных моментов доменов сначала растут домены, у которых угол α между векторами $\vec{p}_m^{\text{ДОМ}}$ и \vec{B} мал. На заключительной стадии намагничивания ферромагнетика происходит поворот магнитных моментов выросших доменов до состояния с $\vec{p}_m^{\text{ДОМ}} \uparrow \vec{H}$, где \vec{H} – напряженность намагничивающего поля. При этом образец представляет собой один домен, магнитный момент которого

$$\vec{p}_m = \sum \vec{p}_m^{\text{ДОМ}} = \sum \vec{p}_m^{\text{АТОМ}} = N \cdot \vec{p}'_m, \quad (1)$$

где N – число атомов в бруске; \vec{p}'_m – магнитный момент атома железа.

Таким образом, в бруске ферромагнетика, намагниченном до насыщения, магнитные моменты всех атомов сонаправлены. В результате этого, согласно равенству (1), модуль магнитного момента железного бруска определяется следующей формулой:

$$p_m = Np'_m. \quad (2)$$

Число атомов N в бруске определим, используя число Авогадро N_A , равное числу атомов в одном моле вещества, умножая это число на количество вещества (число молей) ν :

$$N = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A = \frac{\rho V}{M} N_A = \frac{\rho l S}{M} N_A. \quad (3)$$

Здесь ρ – плотность железа; V – объем бруска, имеющего размеры l и S ; M – молярная масса железа.

Подставляя число атомов N по формуле (3) в равенство (2), получаем расчетную формулу магнитного момента бруска в виде:

$$p_m = \frac{\rho l S N_A p'_m}{M}.$$

Вычислим магнитный момент данного железного бруска, намагниченного до насыщения:

$$p_m = \frac{7,88 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 0,05 \text{ м} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} \cdot 2 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2}{55,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = 8,5 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Полученная величина магнитного момента бруска является достаточно большой. Такой магнитный момент имел бы виток: $p_m^{\text{ВИТ}} = IS$, например, при токе $I = 8,5 \text{ А}$ и площади витка $S = 1 \text{ м}^2$. Другой объект, имеющий магнитный момент, – соленоид; для него величина $p_m = (IS) \cdot N$, где N – число витков. Вычислим магнитный момент соленоида, имеющего ту же площадь сечения, как и брусок: $p_m = (8,5 \text{ А} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2) \cdot 10^4 = 8,5 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Этот оценочный расчет показывает, что катушка с воздушным сердечником имеет такой же магнитный момент, как и железный брусок, при числе витков катушки $N = 10^4$.

Механический момент \vec{M} , действующий в магнитном поле с индукцией \vec{B} на объект, обладающий магнитным моментом \vec{p}_m , определяется следующей формулой:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}; \quad \text{модуль } M = p_m B \sin \alpha, \quad (4)$$

где α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

Максимальная величина механического момента M_{max} , согласно формуле (4), наблюдается при значении $\sin \alpha = 1$, т. е. при расположении вектора магнитного момента бруска $\vec{p}_m \vec{B}$. Вычисляем эту величину по формуле (4):

$$M_{\max} = 8,5 \text{ А} \cdot \text{м}^2 \cdot 1 \text{ Тл} = 8,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для того чтобы удержать такой намагниченный железный брусок в положении, при котором его магнитный момент $\vec{p}_m \vec{B}$, необходимо к концам бруска приложить пару сил, каждая из которых $F = \frac{\frac{1}{2} M_{\max}}{\frac{l}{2}} = \frac{8,5 \text{ Н} \cdot \text{м}}{0,05 \text{ м}} = 170 \text{ Н}$. Это сила тяжести mg груза массой 17 кг. Такой оценочный расчет показывает, как велики магнитные силы, действующие на ферромагнитные объекты.

Задача 56. Железное кольцо средним радиусом $R = 7 \text{ см}$ и площадью поперечного сечения $S = 1 \text{ см}^2$ является сердечником кольцевого соленоида. Его обмотка содержит $N = 200$ витков с током $I = 2,2 \text{ А}$. Определите магнитную индукцию B поля в сердечнике, магнитный поток Φ в сечении кольца и магнитную проницаемость сердечника μ . Используйте график основной кривой намагничивания железа: $B = f(H)$.

Дано

Железное кольцо:
график $B = f(H)$;

$$R = 0,07 \text{ м};$$

$$S = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$N = 200 \text{ витков};$$

$$I = 2,2 \text{ А}.$$

$$B - ? \quad \Phi - ? \quad \mu - ?$$

Решение

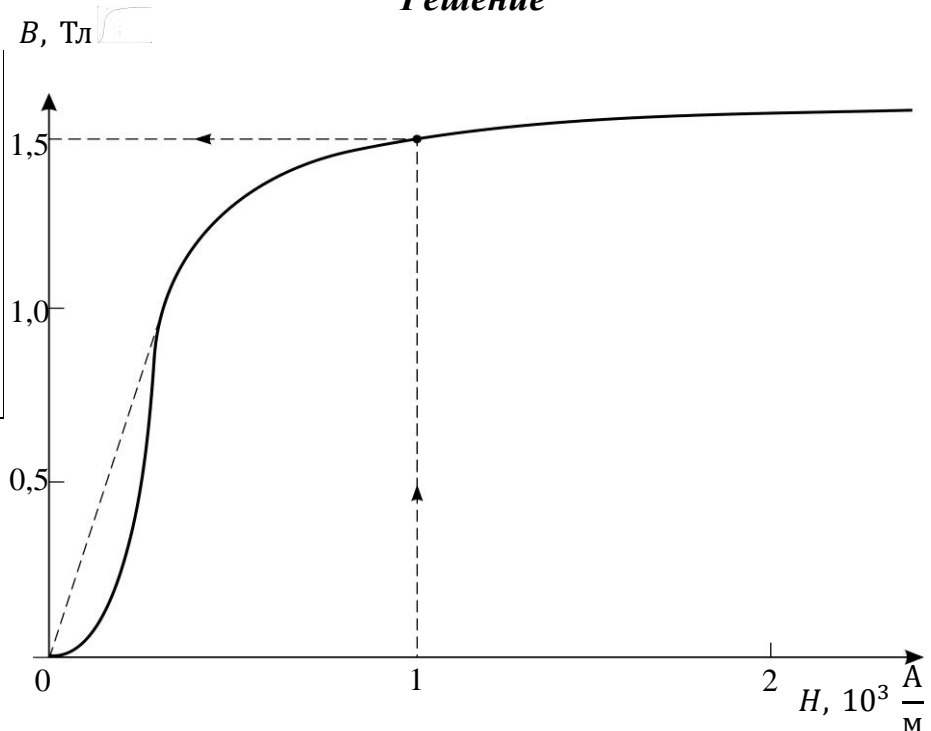


Рис. 86

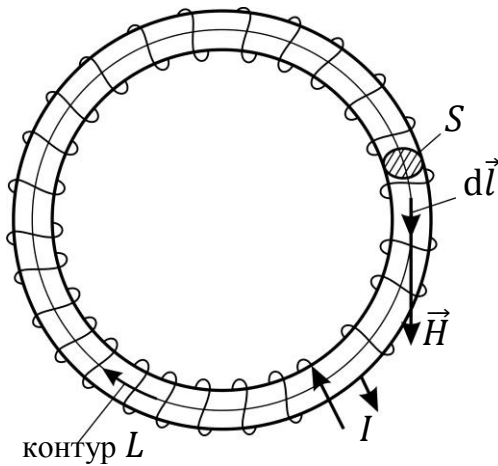


Рис. 87

В таком случае

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_l l = H 2\pi R = NI. \quad (1)$$

Из этого уравнения определяем напряженность МП и вычисляем ее:

$$H = \frac{NI}{2\pi R}. \quad H = \frac{200 \cdot 2,2 \text{ А}}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,07 \text{ м}} = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}} = 1,0 \frac{\text{кА}}{\text{м}}.$$

По графику $B(H)$ (см. рис. 86) для найденной величины $H = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ определяем $B = 1,5 \text{ Тл}$.

Магнитный поток в сечении сердечника определяем с учетом того, что линии магнитной индукции (сонаправленные линиям напряженности МП) являются окружностями, концентрическими кольцу. Такие линии поля перпендикулярны сечению сердечника площадью S (см. рис. 87), поэтому проекция вектора \vec{B} на нормаль к сечению $B_n = B$. Магнитное поле в тонком кольце практически однородно и магнитный поток $\Phi = BS$.

Вычисляем магнитный поток в сечении железного сердечника:

$$\Phi = 1,5 \text{ Тл} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0,15 \text{ мВб}.$$

Величина магнитной проницаемости железного сердечника

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Вычисляем по этой формуле магнитную проницаемость железа при найденной напряженности МП и соответствующем ей значении B :

$$\mu = \frac{1,5 \text{ Тл}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 1 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}} = 1194 = 1,2 \cdot 10^3.$$

Это значение не является максимальным для железа. С помощью графика $B(H)$ можно оценить наибольшее значение магнитной проницаемости μ_{\max} по наибольшему угловому коэффициенту K_{\max} прямой $B = \mu_0 \mu H$:

$K_{\max} = \mu_0 \mu_{\max}$. По графику находим величину $K_{\max} = \left(\frac{B}{H}\right)_{\max} \approx \frac{1,0 \text{ Тл}}{0,3 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}}$.

Соответствующее значение $\mu_{\max} = \frac{K_{\max}}{\mu_0} = \frac{1,0 \text{ Тл}}{0,3 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}} = 2,7 \cdot 10^3$.

Задача 57. Тороидальная катушка с железным сердечником, длина осевой линии которого $l = 50$ см, имеет обмотку, содержащую $N = 500$ витков. При токе в обмотке тороида $I = 1$ А индукция магнитного поля в сердечнике $B = 1,3$ Тл. Какой ток I_1 нужно пропустить по обмотке для получения магнитного поля с такой же величиной B в воздушном зазоре сердечника? Длина воздушного промежутка $l_1 = 1$ см (рис. 88), рассеянием магнитного потока в зазоре можно пренебречь.

Дано

$$l = 0,50 \text{ м};$$

$$N = 500 \text{ витков};$$

$$I = 1 \text{ А};$$

$$B = 1,3 \text{ Тл};$$

$$l_1 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$I_1 - ?$$

Решение

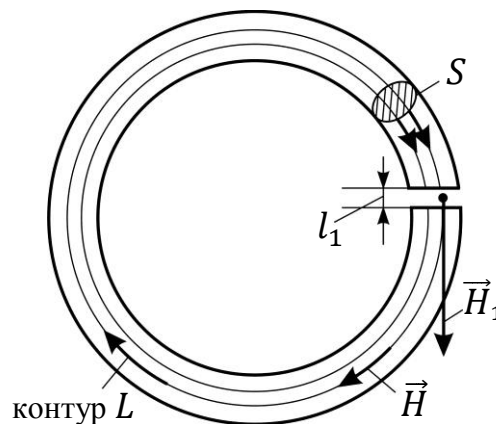


Рис. 88

Если пренебречь рассеянием магнитного потока в зазоре, т. е. принять, что магнитный поток в сердечнике $\Phi = \Phi_1$ – магнитному потоку в воздушном промежутке, то

$$BS = B_1 S; \quad \rightarrow \quad B = B_1.$$

Таким образом, магнитная индукция поля в сердечнике и в воздушном промежутке одинакова. Но напряженности МП различны:

а) в сердечнике с магнитной проницаемостью μ величина $H = \frac{B}{\mu_0 \mu};$ (1)

б) в воздушном промежутке (для воздуха $\mu \approx 1$) – $H_1 = \frac{B}{\mu_0}.$ (2)

Величина магнитной индукции $B = f(H)$; эта зависимость для железа задана графиком (см. рис. 86). Для получения той же величины $B = 1,3$ Тл в случае сердечника с зазором напряженность магнитного поля H внутри сердечника должна быть такой же, как и в сплошном сердечнике (это одна и та же точка на графике $B = f(H)$).

С учетом этих замечаний запишем теорему о циркуляции вектора \vec{H} вдоль контура интегрирования L , совпадающего с осевой линией сердечника. Искомый ток I_1 содержится в правой части теоремы:

а) для сплошного сердечника –

$$\oint H_l dl = H \cdot l = NI; \quad \rightarrow \quad H = \frac{NI}{l}; \quad (3)$$

б) в случае сердечника с воздушным промежутком (см. рис. 88) –

$$H \cdot (l - l_1) + H_1 \cdot l_1 = NI_1. \quad (4)$$

Подставляя значения напряженностей МП, определяемые формулами (2) и (3), в уравнение (4), получаем следующее равенство:

$$NI \frac{(l-l_1)}{l} + \frac{Bl_1}{\mu_0} = NI_1; \quad \rightarrow \quad I_1 = I \left(1 - \frac{l_1}{l}\right) + \frac{Bl_1}{\mu_0 N} \approx I + \frac{Bl_1}{\mu_0 N}. \quad (5)$$

Здесь учтено, что длина зазора $l_1 \ll l$, следовательно, $\frac{l_1}{l} \ll 1$.

Вычисляем ток в обмотке по формуле (5):

$$I_1 = 1 \text{ А} + \frac{1,3 \text{ Тл} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 500} = 21,7 \text{ А}.$$

Таким образом, для намагничивания железного сердечника с воздушным промежутком требуется существенно больший ток, чем в случае сплошного сердечника.

Задача 58. Для сердечника тороида с прорезью, описанного в предыдущей задаче, определите магнитную проницаемость μ_1 . Сравните величину μ_1 с магнитной проницаемостью μ сплошного сердечника того же тороида.

Дано

$$\begin{aligned} l &= 0,50 \text{ м}; \\ N &= 500 \text{ витков}; \\ B &= 1,3 \text{ Тл}; \\ l_1 &= 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \\ I_1 &= 21,7 \text{ А}. \end{aligned}$$

Решение

В случае сердечника с прорезью запишем теорему о циркуляции вектора \vec{H} (см. уравнение (4) в решении предыдущей задачи):

$$H \cdot (l - l_1) + H_1 \cdot l_1 = NI_1. \quad (1)$$

В это уравнение подставим значения напряженностей магнитного поля в сердечнике: $H = \frac{B}{\mu_0 \mu_1}$,

и в воздушном промежутке – $H_1 = \frac{B}{\mu_0}$. При этом уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\frac{B}{\mu_0 \mu_1} (l - l_1) + \frac{Bl_1}{\mu_0} = NI_1; \quad \rightarrow \quad \mu_1 = \frac{(l-l_1)}{\left(\frac{\mu_0 NI_1}{B} - l_1\right)}. \quad (2)$$

Заметим, что полученное выражение (2) является только расчетной формулой величины μ_1 и не передает зависимость μ_1 от длины зазора.

Вычисляем магнитную проницаемость железного сердечника с воздушным промежутком по формуле (2):

$$\mu_1 = \frac{(0,50 - 0,01) \text{ м}}{\left(\frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{М}} \cdot 500 \cdot 21,7 \text{ А}}{1,3 \text{ Тл}} - 1 \cdot 10^{-2} \text{ м} \right)} = 1 \cdot 10^3.$$

Для сплошного железного сердечника из формулы связи величин B и H : $B = \mu_0 \mu H$, – определяем магнитную проницаемость сердечника:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}. \quad (3)$$

Необходимое значение напряженности H поля, намагничивающего сердечник до величины магнитной индукции $B = 1,3 \text{ Тл}$, определяем по графику $B = f(H)$ (см. рис. 86): $H = 0,5 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Используя эти значения B и H , вычисляем магнитную проницаемость сплошного железного сердечника по формуле (3):

$$\mu = \frac{1,3 \text{ Тл}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{М}} \cdot 0,5 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}} = 2 \cdot 10^3.$$

Таким образом, прорезь длиной $l_1 = 1 \text{ см}$ в железном сердечнике вдвое понижает его магнитную проницаемость.

Задача 59. Тонкий кольцевой ферромагнитный сердечник средним радиусом $R = 10 \text{ см}$ имеет поперечную прорезь длиной $l = 0,5 \text{ см}$. Сердечник был намагничен током, протекающим по обмотке, после чего ток отключили. Определите, во сколько раз напряженность магнитного поля H_2 в воздушном зазоре превышает напряженность H_1 МП в сердечнике. Оцените магнитную проницаемость μ ферромагнитного сердечника.

Дано

$$R = 10 \text{ см};$$

$$l = 0,5 \text{ см}.$$

$$\frac{H_2}{H_1} = ?$$

$$\mu = ?$$

Решение

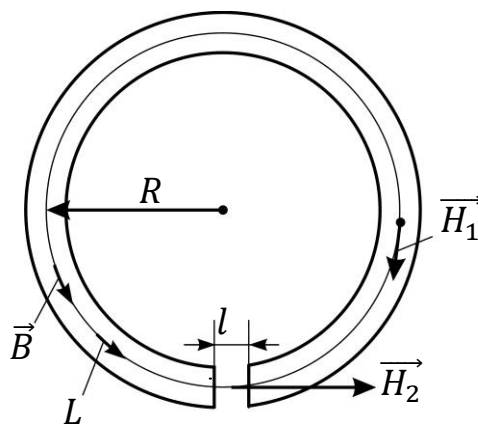


Рис. 89

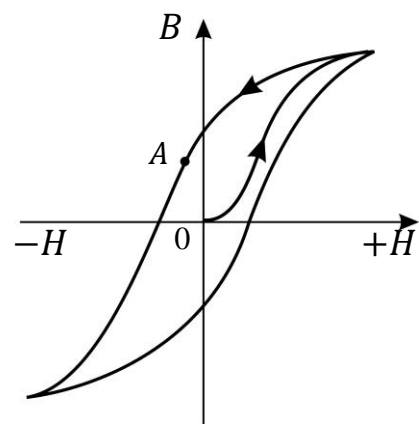


Рис. 90

Запишем теорему о циркуляции вектора \vec{H} вдоль контура L , совпадающего со средней линией сердечника (рис. 89). Направление обхода по контуру интегрирования выберем вдоль вектора магнитной индукции $\vec{B} = \vec{B}_1 = \vec{B}_2$ (рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре пренебрегаем). Так как ток в обмотке отсутствует: $I = 0$, – то теорема запишется в следующем виде:

$$-H_1(2\pi R - l) + H_2 l = 0. \quad (1)$$

Здесь проекция вектора напряженности \vec{H}_1 в сердечнике $H_{1l} = -H_1$, так как после отключения намагничивающего поля напряженностью $+H$ соотношение величин B и H_1 в магнитном поле сердечника соответствует точке A на верхней ветви петли гистерезиса (рис. 90). Из уравнения (1) находим искомое отношение напряженностей:

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{2\pi R - l}{l}.$$

Вычисляем это отношение, показывающее, во сколько раз напряженность магнитного поля H_2 в воздушном зазоре превышает напряженность H_1 МП в сердечнике:

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10 \text{ см} - 0,5 \text{ см}}{0,5 \text{ см}} = 1,2 \cdot 10^2.$$

Для определения магнитной проницаемости μ ферромагнитного сердечника используем формулы связи магнитной индукции B с напряженностью магнитного поля H :

а) в сердечнике величина $B_1 = \mu_0 \mu H_1$;

б) в зазоре – $B_2 = \mu_0 H_2$, так как для воздуха $\mu \approx 1$.

Приравняв $B_1 = B_2$, в силу непрерывности линий магнитной индукции, получаем расчетную формулу магнитной проницаемости сердечника после отключения тока в намагничивающей обмотке:

$$\mu_0 \mu H_1 = \mu_0 H_2; \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{H_2}{H_1} = 1,2 \cdot 10^2.$$

Задача 60. Тороидальная катушка с железным сердечником, длина осевой линии которого $l = 1,0$ м, имеет обмотку, содержащую $N = 500$ витков с током $I = 10$ А. В сердечнике имеется поперечная прорезь длиной $l_1 = 1$ см (рис. 91). Определите индукцию магнитного поля B в сердечнике и в зазоре. Рассеянием магнитного потока в зазоре можно пренебречь.

Дано

$$l = 1,0 \text{ м};$$

$$N = 500 \text{ витков};$$

$$I = 10 \text{ А};$$

Решение

$$l_1 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$B - ?$

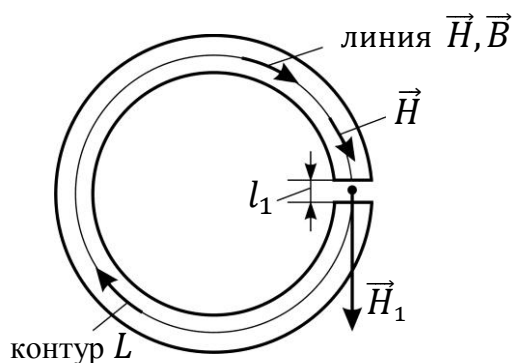


Рис. 91

Для материала сердечника – железа, величина магнитной индукции B зависит от напряженности магнитного поля H в соответствии с экспериментальной кривой намагничивания $B(H)$ (см. рис. 86). Величина напряженности магнитного поля H зависит от тока в обмотке катушки. Запишем теорему о циркуляции вектора \vec{H} вдоль контура интегрирования L , совпадающего с осевой линией тороидального сердечника (см. рис. 91):

$$H(l - l_1) + H_1 l_1 = NI; \quad \text{так как } l_1 \ll l, \text{ то } Hl + H_1 l_1 = NI. \quad (1)$$

Здесь напряженность МП в воздушном зазоре $H_1 = \frac{B}{\mu_0}$, так как для воздуха $\mu \approx 1$. С учетом этого теорему (1) запишем в следующем виде:

$$Hl + \frac{Bl_1}{\mu_0} = NI; \quad \rightarrow \quad B = -\mu_0 H \frac{l}{l_1} + \frac{\mu_0 NI}{l_1}. \quad (2)$$

Получено уравнение прямой линии $B = f(H)$ для заданного в задаче тороидального сердечника с воздушным промежутком.

Итак, имеется две зависимости, связывающие переменные B и H : 1) график кривой намагничивания железа $B = f(H)$ и 2) зависимость $B = f(H)$, описываемая уравнением (2). Имея две зависимости, можем определить две неизвестные величины – B и H . Так как одна из зависимостей экспериментальная, и задана графиком, то решим систему двух уравнений $B = f(H)$ графическим методом. Для этого построим линейную зависимость (2) на поле кривой намагничивания (рис. 92).

$B, \text{ Тл}$

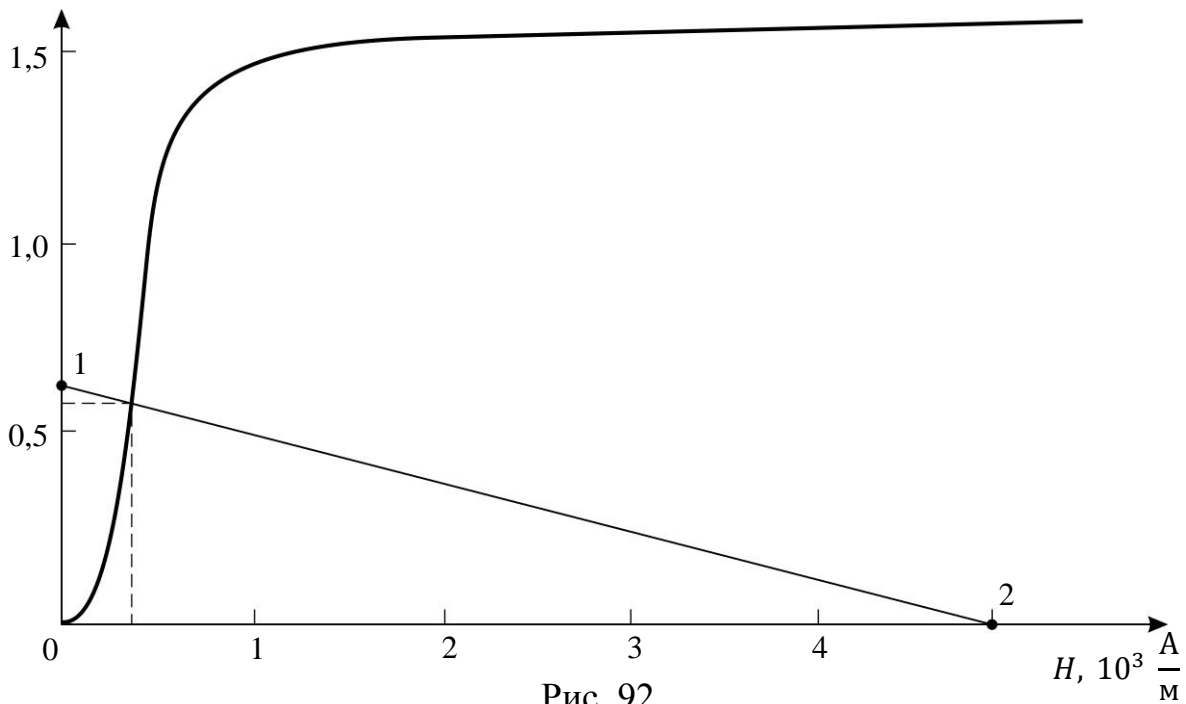


Рис. 92

Для проведения прямой линии достаточно знать две точки; их координаты определим по уравнению (2), выбрав удобные для вычислений точки: одна из них – точка 1, координаты которой равны $H_1 = 0$; $B_1 = \frac{\mu_0 NI}{l_1} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot 500 \cdot 10 \text{ А}}{1 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 0,63 \text{ Тл}$; вторая – точка 2: $B_2 = 0$; $H_2 = \frac{NI}{l} = \frac{500 \cdot 10 \text{ А}}{1 \text{ м}} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Эти точки с вычисленными координатами: т. 1 (0; 0,63 Тл) и т. 2 ($5 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}$; 0), – нанесем на поле графика и проведем прямую 1–2, которая описывается уравнением (2). Решением системы двух зависимостей, представленных на графике, является их общая точка – точка пересечения линий. Эта точка имеет следующие координаты (см. рис. 92): $H = 0,2 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}$; $B = 0,6 \text{ Тл}$.